Un soupçon de catégories servi sur son lit de logique quantique

Titouan Carette, LORIA, MOCQUA

EJCIM

3 avril 2018

Introducing : John Von Neumann.

"The object of the present paper is to discover what logical structure one may hope to find in physical theories which, like quantum mechanics, do not conform to classical logic.", **The logic of quantum mechanics**, Birkhoff et Von Neumann, 1936.

Introducing : John Von Neumann.

"The object of the present paper is to discover what logical structure one may hope to find in physical theories which, like quantum mechanics, do not conform to classical logic.", **The logic of quantum mechanics**, Birkhoff et Von Neumann, 1936.

Algebre de Von Neumann :

Une $*$-algebre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, fermée pour la topologies faible et contenant lidentité.

Un continuum de vérité.

$$X \xrightarrow{\quad\quad \mathcal{P} \quad\quad} \{0,1\}$$

Un continuum de vérité.

$$X \xrightarrow{\qquad\mathcal{P}\qquad} \{0,1\}$$

- Structure de $\{0,1\}$: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, etc...

Un continuum de vérité.

$$X \xrightarrow{\quad\mathcal{P}\quad} \{0,1\}$$

⊜ Structure de $\{0,1\}$: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, etc. . . $\Rightarrow$ **Algèbre de Boole**.

Un continuum de vérité.

$$X \xrightarrow{\quad\quad\mathcal{P}\quad\quad} \{0,1\}$$

⊜ Structure de $\{0,1\}$: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, etc. . . $\Rightarrow$ **Algèbre de Boole**.

$$X \xrightarrow{\quad\quad\mathcal{P}'\quad\quad} [0,1]$$

Un continuum de vérité.

$$X \xrightarrow{\qquad\mathcal{P}\qquad} \{0,1\}$$

- Structure de $\{0,1\}$: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, etc... $\Rightarrow$ **Algèbre de Boole**.

$$X \xrightarrow{\qquad\mathcal{P}'\qquad} [0,1]$$

- Structure de $[0,1]$: $\times$, $+$, $1-x$, etc...

Un continuum de vérité.

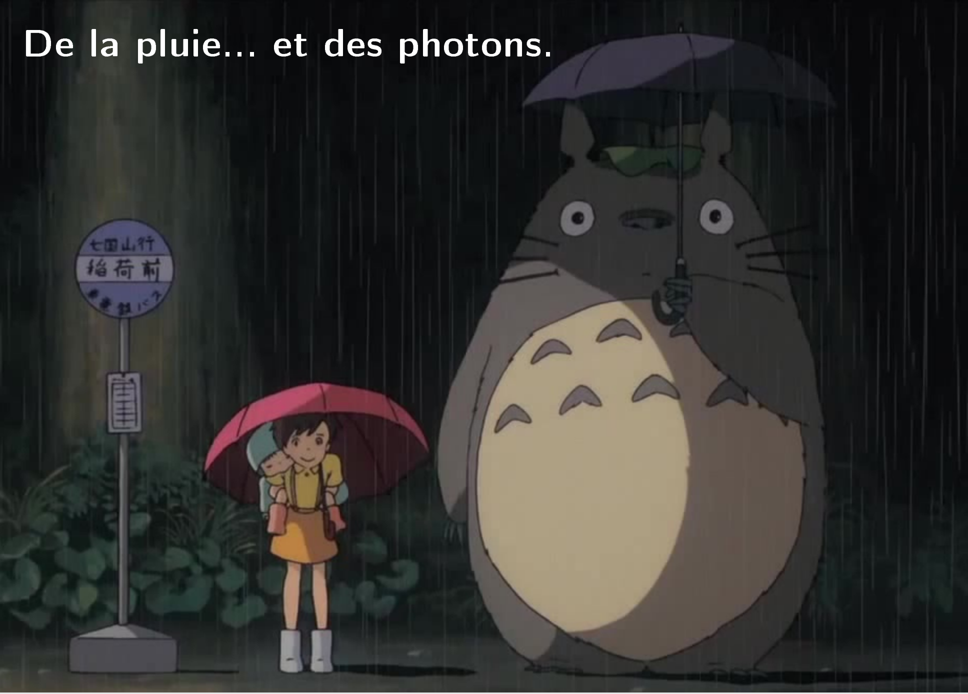
$$X \xrightarrow{\quad\quad\mathcal{P}\quad\quad} \{0,1\}$$

- Structure de $\{0,1\}$: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, etc... $\Rightarrow$ **Algèbre de Boole**.

$$X \xrightarrow{\quad\quad\mathcal{P}'\quad\quad} [0,1]$$

- Structure de $[0,1]$: $\times$, $+$, $1-x$, etc... $\Rightarrow$ **Module d'effet**.

De la pluie... et des photons.



L'effectus : un tas de processus entre systèmes typés.

L'effectus : un tas de processus entre systèmes typés.

- Il existe un type unit 1 ne contenant pas d'information, c'est à dire un unique habitant.

L'effectus : un tas de processus entre systèmes typés.

- Il existe un type unit 1 ne contenant pas d'information, c'est à dire un unique habitant.

- On peut faire des sommes convexes de types $X + Y$.

L'effectus : un tas de processus entre systèmes typés.

- Il existe un type unit 1 ne contenant pas d'information, c'est à dire un unique habitant.
- On peut faire des sommes convexes de types $X + Y$.
- Si on sait comment $P : X + X + X \to Y$ agit sur deux composantes on sait comment il agit sur la troisième.

L'effectus : un tas de processus entre systèmes typés.

- Il existe un type unit 1 ne contenant pas d'information, c'est à dire un unique habitant.
- On peut faire des sommes convexes de types $X + Y$.
- Si on sait comment $P : X + X + X \to Y$ agit sur deux composantes on sait comment il agit sur la troisième.
- Si $P : X \to Y + Z$ ne va jamais dans Z alors il est uniquement déterminé par un $P' : X \to Y$.

L'effectus : un tas de processus entre systèmes typés.

- Il existe un type unit 1 ne contenant pas d'information, c'est à dire un unique habitant.
- On peut faire des sommes convexes de types $X + Y$.
- Si on sait comment $P : X + X + X \to Y$ agit sur deux composantes on sait comment il agit sur la troisième.
- Si $P : X \to Y + Z$ ne va jamais dans Z alors il est uniquement déterminé par un $P' : X \to Y$.
- Si $a : X \to A + 1$ et $b : X \to 1 + B$ sont compatibles, on peut les combiner en un unique $c : X \to A + B$.

Ramener un peu de sujet.

$$X \xrightarrow{\quad \mathcal{P}' \quad} 2$$

$$\Downarrow$$

$$X \xrightarrow{\quad Instr_{\mathcal{P}'} \quad} X + X \xrightarrow{\quad \sigma \quad} 2$$

- 2 est une notation pour $1 + 1$ qui représente $[0, 1]$.
- σ oubli le système et ne se souvient que des probabilités.
- Ça commute ?

Une botanique de l'Effectus.

- Un processus typique $P : A \to B$.

Une botanique de l'Effectus.

- Un processus typique $P : A \to B$.
- L'effacement $! : A \to 1$.

Une botanique de l'Effectus.

- Un processus typique $P : A \to B$.
- L'effacement $! : A \to 1$.
- Un élément (état) $P : 1 \to A$. Structure d'espace convexe.

Une botanique de l'Effectus.

- Un processus typique $P : A \to B$.
- L'effacement $! : A \to 1$.
- Un élément (état) $P : 1 \to A$. Structure d'espace convexe.
- Un prédicat (effet) $P : A \to 2$. Structure de module d'effet.

Une botanique de l'Effectus.

- Un processus typique $P : A \to B$.
- L'effacement $! : A \to 1$.
- Un élément (état) $P : 1 \to A$. Structure d'espace convexe.
- Un prédicat (effet) $P : A \to 2$. Structure de module d'effet.
- Une probabilité (scalaire) $P : 1 \to 2$. Structure de monoïde d'effet.

Le triangle états-effets.

$\mathcal{E}$

Le triangle états-effets.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Conv} & \\
& \mathcal{E} \arrow[ul, "Stat : X \mapsto \mathcal{E}[1, X]"]
\end{tikzcd}
$$

Le triangle états-effets.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbf{Conv} & & \mathbf{EM}^{op} \\
& \mathcal{E} \arrow[ul, "Stat : X \mapsto \mathcal{E}[1, X]"] \arrow[ur, "Pred : X \mapsto \mathcal{E}[X, 2]"'] &
\end{tikzcd}$$

Le triangle états-effets.

$$
\begin{tikzcd}
\textbf{Conv} \arrow[rr, bend left, "\textbf{Conv}[\_\,,2]"] & & \textbf{EM}^{op} \arrow[ll, bend left, "\textbf{EM}[\_\,,2]"] \\
& \mathcal{E} \arrow[ul, "Stat\,:\,X \mapsto \mathcal{E}[1,X]"] \arrow[ur, "Pred\,:\,X \mapsto \mathcal{E}[X,2]"'] &
\end{tikzcd}
$$

Et après ?

- Avec un tenseur ?
- Une définition élégante des instruments ?
- Quid des structures probabilistes usuels ? Monade de Giry, Integration selon une mesure, etc...
- Comment caractériser précisément le quantique la dedans ?
- Avons nous bien pressé toute la pulpe des algèbres de Von Neumann ?
- c'est la fin !