Évitabilité des k-puissances additives

Florian Lietard

Directeurs de thèse : Damien Jamet (LORIA) et Thomas Stoll (I.E.C.L.)

Question :

Qu'est-ce que l'évitabilité des k-puissances additives ?

Question :

Qu'est-ce que l'évitabilité des k-puissances additives ?

Soit l'alphabet $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et soit

$$w = 31410421030342432334121433332224 \cdots$$

le mot infini construit en écrivant π modulo 5

Question :

Qu'est-ce que l'évitabilité des k-puissances additives ?

Soit l'alphabet $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et soit

$$w = 31410421030342432334121433332224 \cdots$$

le mot infini construit en écrivant π modulo 5

w contient un carré additif (ou une 2-puissance additive)

$$w = 31 \cdot \underbrace{410421}_{\Sigma=12} \cdot \underbrace{030342}_{\Sigma=12} \cdot 432334121433332224 \cdots$$

On dira qu'un mot contient un carré additif s'il contient deux blocs consécutifs de même taille et de même somme

Problème :

Est-il possible, sur un alphabet fini, de construire un mot infini qui évite les k-puissances additives ? (pour $k = 2, 3 \ldots$)

Problème :

Est-il possible, sur un alphabet fini, de construire un mot infini qui évite les k-puissances additives ? (pour $k = 2$, 3 ...)

On sait le faire pour les 3-puissances sur l'alphabet $\{0, 1, 3, 4\}$.

Un mot sans cube additif [J. Cassaigne *et* al. 2014]

$$\sigma_1 : 0 \mapsto 03, \qquad 1 \mapsto 43, \qquad 3 \mapsto 1, \qquad 4 \mapsto 01$$

$$\sigma_1^{\infty}(0) = 03143011034343031011011031430343430343430314301\ldots$$

J. Cassaigne, J. D. Currie, L. Schaeffer, J. Shallit (2014)
Avoiding Three Consecutive Blocks of the Same Size and Same Sum,
In *Journal of the ACM* , (61) :2 17 pages, 2014

Un peu de contexte

Un peu de contexte

1906 : Les travaux d'Axel Thue posent la base de l'étude de l'évitabilité de certains schémas dans les mots infinis.

Un peu de contexte

1906 : Les travaux d'Axel Thue posent la base de l'étude de l'évitabilité de certains schémas dans les mots infinis.

"Für die Entwicklung der logischen Wissenschaften wird es, ohne Rücksicht auf etwaige Anwendungen, von Bedeutung sein, ausgedehnte Felder für Spekulation über schwierige Probleme zu finden"

Axel Thue, 1912.

Un peu de contexte

1906 : Les travaux d'Axel Thue posent la base de l'étude de l'évitabilité de certains schémas dans les mots infinis.

> *"Für die Entwicklung der logischen Wissenschaften wird es, ohne Rücksicht auf etwaige Anwendungen, von Bedeutung sein, ausgedehnte Felder für Spekulation über schwierige Probleme zu finden"*
>
> Axel Thue, 1912.

Approximativement : "Il sera nécessaire pour le développement des sciences logiques de trouver des vastes domaines de recherche liés à des problèmes difficiles, sans regard aux applications potentiels. "

Un peu de contexte

1906 : Les travaux d'Axel Thue posent la base de l'étude de l'évitabilité de certains schémas dans les mots infinis.

"Für die Entwicklung der logischen Wissenschaften wird es, ohne Rücksicht auf etwaige Anwendungen, von Bedeutung sein, ausgedehnte Felder für Spekulation über schwierige Probleme zu finden"

Axel Thue, 1912.

Approximativement : "Il sera nécessaire pour le développement des sciences logiques de trouver des vastes domaines de recherche liés à des problèmes difficiles, sans regard aux applications potentiels. "

Plusieurs domaines d'applications :

Un peu de contexte

1906 : Les travaux d'Axel Thue posent la base de l'étude de l'évitabilité de certains schémas dans les mots infinis.

"Für die Entwicklung der logischen Wissenschaften wird es, ohne Rücksicht auf etwaige Anwendungen, von Bedeutung sein, ausgedehnte Felder für Spekulation über schwierige Probleme zu finden"

Axel Thue, 1912.

Approximativement : "Il sera nécessaire pour le développement des sciences logiques de trouver des vastes domaines de recherche liés à des problèmes difficiles, sans regard aux applications potentiels. "

Plusieurs domaines d'applications :

- Dynamique symbolique

Un peu de contexte

1906 : Les travaux d'Axel Thue posent la base de l'étude de l'évitabilité de certains schémas dans les mots infinis.

> *"Für die Entwicklung der logischen Wissenschaften wird es, ohne Rücksicht auf etwaige Anwendungen, von Bedeutung sein, ausgedehnte Felder für Spekulation über schwierige Probleme zu finden"*
>
> Axel Thue, 1912.

Approximativement : "Il sera nécessaire pour le développement des sciences logiques de trouver des vastes domaines de recherche liés à des problèmes difficiles, sans regard aux applications potentiels. "

Plusieurs domaines d'applications :

- Dynamique symbolique
- Théorie des graphes (coloration)

Un peu de contexte

1906 : Les travaux d'Axel Thue posent la base de l'étude de l'évitabilité de certains schémas dans les mots infinis.

"Für die Entwicklung der logischen Wissenschaften wird es, ohne Rücksicht auf etwaige Anwendungen, von Bedeutung sein, ausgedehnte Felder für Spekulation über schwierige Probleme zu finden"

Axel Thue, 1912.

Approximativement : "Il sera nécessaire pour le développement des sciences logiques de trouver des vastes domaines de recherche liés à des problèmes difficiles, sans regard aux applications potentiels. "

Plusieurs domaines d'applications :

- Dynamique symbolique
- Théorie des graphes (coloration)
- Théorie des groupes

Un peu de contexte

1906 : Les travaux d'Axel Thue posent la base de l'étude de l'évitabilité de certains schémas dans les mots infinis.

"Für die Entwicklung der logischen Wissenschaften wird es, ohne Rücksicht auf etwaige Anwendungen, von Bedeutung sein, ausgedehnte Felder für Spekulation über schwierige Probleme zu finden"

Axel Thue, 1912.

Approximativement : "Il sera nécessaire pour le développement des sciences logiques de trouver des vastes domaines de recherche liés à des problèmes difficiles, sans regard aux applications potentiels. "

Plusieurs domaines d'applications :

- Dynamique symbolique
- Théorie des graphes (coloration)
- Théorie des groupes
- Semigroupes

P. Erdős introduisit en 1961 la notion de k-puissances abéliennes

P. Erdős introduisit en 1961 la notion de k-puissances abéliennes

w contient un carré abélien (une 2-puissance abélienne)

ie : il contient deux blocs consécutifs de même taille et identiques à permutation près

$$w = 31410421030 \cdot 342 \cdot 432 \cdot 33412143333224 \cdots$$

P. Erdős introduisit en 1961 la notion de k-puissances abéliennes

w contient un carré abélien (une 2-puissance abélienne)

ie : il contient deux blocs consécutifs de même taille et identiques à permutation près

$$w = 31410421030 \cdot 342 \cdot 432 \cdot 33412143333224 \cdots$$

Question générale

Existe t-il, sur un alphabet fini, un mot qui ne contienne pas de cube (resp. cube abélien, cube additif) ? Et pas de carré (resp. carré abélien, carré additif) ?

Un mot sans cube abélien [F.M. Dekking, 1979]

$$\sigma_2 : a \mapsto aabc, \qquad b \mapsto bbc, \qquad c \mapsto acc$$

$$\sigma_2(a) = aabc \cdot aabc \cdot bbc \cdot acc \cdot aabc \ldots$$

Un mot sans cube abélien [F.M. Dekking, 1979]

$$\sigma_2 : a \mapsto aabc, \qquad b \mapsto bbc, \qquad c \mapsto acc$$
$$\sigma_2(a) = aabc \cdot aabc \cdot bbc \cdot acc \cdot aabc \ldots$$

Un mot sans carré abélien [V. Keränen, 1992]

$$\sigma_3 : a \mapsto \quad abcacdcbcdcadcdbdabacabadbabcbdbcbacbcdcacb$$
$$abdabacbcdcacdcbdcdadbdcbca$$

Les mots images pour b, c et d sont obtenus par permutations cycliques des lettres du mot $\sigma_3(a)$

Dekking, F.M (1979)
Strongly non-repetitive sequences and progression-free sets,
In *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, (27) :2 181-185, 1979.

Keranänen, V. (1992)
Abelian squares are avoidable over 4 letters,
In Automata, Languages and Programming : 19th International Colloquium Wien, Austria, July 13–17, 1992

Un mot sans cube additif [J. Cassaigne *et* al. 2014]

$$\sigma_1 : 0 \mapsto 03, \qquad 1 \mapsto 43, \qquad 3 \mapsto 1, \qquad 4 \mapsto 01$$

$$\sigma_1^\infty(0) = 031430110343430310110110314303434303434303 14301\ldots$$

Un mot sans cube additif [J. Cassaigne *et* al. 2014]

$$\sigma_1 : 0 \mapsto 03, \qquad 1 \mapsto 43, \qquad 3 \mapsto 1, \qquad 4 \mapsto 01$$

$$\sigma_1^\infty(0) = 031430110343430310110110314303434303434303 14301\ldots$$

Un morphisme sans cube additif [M. Rao. 2014]

$$\begin{array}{ccc} & s_{\{0,1,5\}} : & \{0,1,3,4\}^\star \longrightarrow \{0,1,5\}^\star \\ 0 & \longmapsto & \{005015100100115010115, 005015100100115100115\} \\ 1 & \longmapsto & \{005015100100105055115, 050015100100105055115\} \\ 3 & \longmapsto & \{005015101155155055115, 050015101155155055115\} \\ 4 & \longmapsto & \{005015155055155055115, 050015155055155055115\} \end{array}$$

$s_{\{0,1,5\}}(\sigma_1^\infty(0))$ est sans cube additif

J. Cassaigne, J. D. Currie, L. Schaeffer, J. Shallit (2014)
Avoiding Three Consecutive Blocks of the Same Size and Same Sum,
In *Journal of the ACM* , (61) :2 17 pages, 2014

M. Rao (2015)
On some generalizations of abelian power avoidability,
In *Theoretical Computer Science*, (601) 39-46, 2015

1. Il y a des mots sans cube additif (resp. carré abélien)
2. Mots morphiques : Tous ces mots sont des points fixes de morphismes
3. Plus l'alphabet est petit, plus le problème est complexe
4. Plus la puissance à éviter est petite, plus le morphisme est compliqué
5. Toutes les preuves sont *ad hoc*
6. *"Another four color problem ?"*[1]

4. ANOTHER FOUR-COLOR PROBLEM?

Although the lemma of Section 2 yields simple solutions to the (2, 4)- and (3, 3)-problems, we have not been able to solve the (4, 2)-problem. The following observation suggests that the latter might be much more difficult to tackle. Pleasants' result, the solution of the (5, 2)-problem, allows a proof in the spirit of our lemma, with the same substitution as his, although his methods are quite different. Specifically, there exists a group G and a map $f\colon \{a, b, c, d, e\} \to G$ nearly satisfying property (iii), and fully satisfying properties (ii) and (iv). However the group G in this case has order 9375.

Question ouverte

Existe-t-il un mot infini sans carré additif sur un alphabet fini ?

1. F.M. Dekking – Strongly non-repetitive sequences and progression-free sets – 1979

Généraliser la démonstration

Après avoir mené des expérimentations informatiques nous avons obtenu les résultats suivants :

Généraliser la démonstration

Après avoir mené des expérimentations informatiques nous avons obtenu les résultats suivants :

Résultats expérimentaux sur les alphabets à 4 lettres de $\{0, \ldots, 25\}$

1. Il y a exactement 32068 morphismes sans cube additif
2. Tous ces morphismes sont semblables (via la matrice d'incidence) à celui donné par Cassaigne *et* al.
3. Très peu de ces morphismes contiennent des carrés additifs qui ne sont pas des carrés abéliens ($< 5\%$)

Généraliser la démonstration

Après avoir mené des expérimentations informatiques nous avons obtenu les résultats suivants :

Résultats expérimentaux sur les alphabets à 4 lettres de $\{0, \ldots, 25\}$

1. Il y a exactement 32068 morphismes sans cube additif
2. Tous ces morphismes sont semblables (via la matrice d'incidence) à celui donné par Cassaigne *et* al.
3. Très peu de ces morphismes contiennent des carrés additifs qui ne sont pas des carrés abéliens ($< 5\%$)

Travail effectué

Nous avons retenu un morphisme de cette liste ayant la particularité d'engendrer des carrés additifs propres (qui ne sont pas abéliens).
Le but, en adaptant la preuve à ce cas, est de montrer qu'elle peut se généraliser et obtenir une classe de morphismes dont les points fixes évitent les cubes additifs.

On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 6\}$ et le morphisme $\varphi : \Sigma^* \to \Sigma^*$ définit par

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 2 \\ \varphi(1) & = 62 \\ \varphi(2) & = 10 \\ \varphi(6) & = 60 \end{cases} \text{, exemple :} \quad \varphi(12) = 6210$$

On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 6\}$ et le morphisme $\varphi : \Sigma^* \to \Sigma^*$ définit par

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 2 \\ \varphi(1) & = 62 \\ \varphi(2) & = 10 \\ \varphi(6) & = 60 \end{cases} \text{, exemple :} \quad \varphi(12) = 6210$$

Sa matrice d'incidence :

$$M = \mathrm{Mat}(\varphi) = (|\varphi(a_j)|_{a_i})_{i,j \in [\![1;4]\!]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit également son point fixe

$$\mathbf{w} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(6) = 6021062260101060262262260210601010601 01\cdots$$

On définit également son point fixe

$$\mathbf{w} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(6) = 6021062260101060262262260210601010601 01\cdots$$

Il semblerait que, contrairement au point fixe de σ_1, il possède des carrés additifs non abéliens :

$$\mathbf{w} = 6021062260101 \cdot \underbrace{06026}_{\Sigma=14} \cdot \underbrace{22622}_{\Sigma=14} \cdot 6021060101060101\cdots$$

On définit également son point fixe

$$\mathbf{w} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(6) = 6021062260101060262262260210601010601 01\cdots$$

Il semblerait que, contrairement au point fixe de σ_1, il possède des carrés additifs non abéliens :

$$\mathbf{w} = 6021062260101 \cdot \underbrace{06026}_{\Sigma=14} \cdot \underbrace{22622}_{\Sigma=14} \cdot 6021060101060101\cdots$$

$$\sigma_1^{\infty}(0) = 0314301103434303101101103143034343034343 0314301\ldots$$

La notion de parent

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 2 \\ \varphi(1) & = 62 \\ \varphi(2) & = 10 \\ \varphi(6) & = 60 \end{cases}$$

La notion de parent

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 2 \\ \varphi(1) & = 62 \\ \varphi(2) & = 10 \\ \varphi(6) & = 60 \end{cases}$$

- $\varphi^1(6) = 60$

La notion de parent

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 2 \\ \varphi(1) & = 62 \\ \varphi(2) & = 10 \\ \varphi(6) & = 60 \end{cases}$$

- $\varphi^1(6) = 60$
- $\varphi^2(6) = 602$

La notion de parent

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 2 \\ \varphi(1) & = 62 \\ \varphi(2) & = 10 \\ \varphi(6) & = 60 \end{cases}$$

- $\varphi^1(6) = 60$
- $\varphi^2(6) = 602$
- $\varphi^3(6) = 60210$

La notion de parent

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 2 \\ \varphi(1) & = 62 \\ \varphi(2) & = 10 \\ \varphi(6) & = 60 \end{cases}$$

- $\varphi^1(6) = 60$
- $\varphi^2(6) = 602$
- $\varphi^3(6) = 60210$
- $\varphi^4(6) = 60210622$

La notion de parent

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 2 \\ \varphi(1) & = 62 \\ \varphi(2) & = 10 \\ \varphi(6) & = 60 \end{cases}$$

- $\varphi^1(6) = 60$
- $\varphi^2(6) = 602$
- $\varphi^3(6) = 60210$
- $\varphi^4(6) = 60210622$
- $\varphi^5(6) = 60210622601010$

La notion de parent

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 2 \\ \varphi(1) & = 62 \\ \varphi(2) & = 10 \\ \varphi(6) & = 60 \end{cases}$$

- $\varphi^1(6) = 60$
- $\varphi^2(6) = 602$
- $\varphi^3(6) = 60210$
- $\varphi^4(6) = 60210622$
- $\varphi^5(6) = 6021062260 1010$

La notion de parent

$$\begin{cases} \varphi(0) & = 2 \\ \varphi(1) & = 62 \\ \varphi(2) & = 10 \\ \varphi(6) & = 60 \end{cases}$$

- $\varphi^1(6) = 60$
- $\varphi^2(6) = 602$
- $\varphi^3(6) = 60210$
- $\varphi^4(6) = 60210622$
- $\varphi^5(6) = 6021062260 1010$

Notion de parents :

w[p]	6	0	2	1	0	6	2	2	6	0	1	0	1	0
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
par(p)	0	0	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7

Question :

Comment traduire le fait qu'il y ait un cube additif ?

Question :

Comment traduire le fait qu'il y ait un cube additif ?

On définit un triple bloc par un quadruplet de positions

$$(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

où le i-ème bloc correspond aux lettres entre la position p_i incluse et la position p_{i+1} exclue

Question :

Comment traduire le fait qu'il y ait un cube additif ?

On définit un triple bloc par un quadruplet de positions

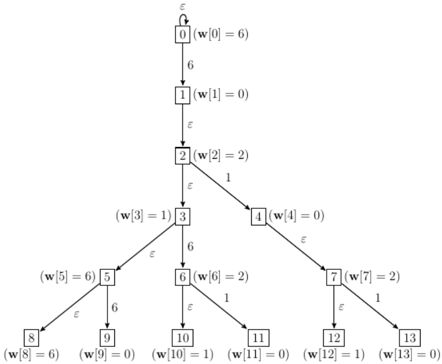
$$(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

où le i-ème bloc correspond aux lettres entre la position p_i incluse et la position p_{i+1} exclue

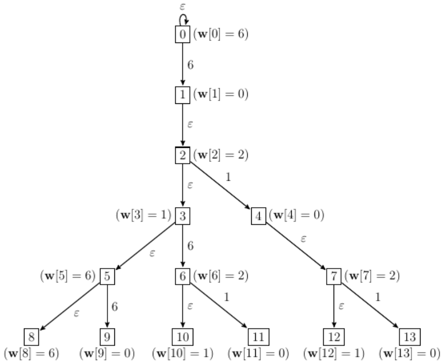
$\mathbf{w}[p]$	6	0	2	1	0	6	2	2	6	0	1	0	1	0
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathbf{par}(p)$	0	0	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7

On utilise la notion de parents pour remonter les quadruplets de positions, pour cela on construit l'arbre T suivant :

On utilise la notion de parents pour remonter les quadruplets de positions, pour cela on construit l'arbre T suivant :



On utilise la notion de parents pour remonter les quadruplets de positions, pour cela on construit l'arbre T suivant :



Et comme il y a quatre positions à considérer on travaille dans T^4.

Sauf que T^4 a un petit problème

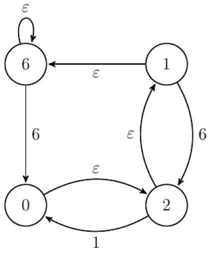
Sauf que T^4 a un petit problème

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ le nombre de chemins de longueur } n \text{ dans T est infini !}$$

Sauf que T^4 a un petit problème

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ le nombre de chemins de longueur } n \text{ dans T est infini !}$$

On le remplace donc par Q, un graphe dirigé :



Remarque :

On peut remonter grâce à la notion de parents mais deux lettres différentes peuvent avoir le même parent. C'est pourquoi on inscrit aussi les transitions.

Le vecteur de Parikh

Pour un mot x donné, le vecteur de Parikh $\psi(x)$ est le vecteur colonne qui compte le nombre d'occurences de chaque lettre du mot :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} |x|_0 \\ |x|_1 \\ |x|_2 \\ |x|_6 \end{pmatrix}, \text{ exemple : } \psi(60210) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de Parikh

Pour un mot x donné, le vecteur de Parikh $\psi(x)$ est le vecteur colonne qui compte le nombre d'occurences de chaque lettre du mot :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} |x|_0 \\ |x|_1 \\ |x|_2 \\ |x|_6 \end{pmatrix}, \text{ exemple : } \psi(60210) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si b et c sont deux blocs contenus dans $\mathbf{w}$ de même taille et même somme alors le vecteur $\mathbf{v} = \psi(b) - \psi(c)$ appartient au réseau euclidien :

$$\mathfrak{L} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^4 : (1,1,1,1) \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ et } (0,1,2,6) \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

Le vecteur de Parikh

Pour un mot x donné, le vecteur de Parikh $\psi(x)$ est le vecteur colonne qui compte le nombre d'occurences de chaque lettre du mot :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} |x|_0 \\ |x|_1 \\ |x|_2 \\ |x|_6 \end{pmatrix} \text{, exemple : } \psi(60210) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si b et c sont deux blocs contenus dans **w** de même taille et même somme alors le vecteur $\mathbf{v} = \psi(b) - \psi(c)$ appartient au réseau euclidien :

$$\mathfrak{L} := \{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^4 : (1,1,1,1) \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ et } (0,1,2,6) \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

La matrice d'incidence M se diagonalise en Λ avec $M = Q\Lambda Q^{-1}$, c'est à dire $Q^{-1}M = \Lambda Q^{-1}$.
En notant τ_i la multiplication à gauche par la i-ème ligne de Q^{-1} on obtient $\tau_i(M(\mathbf{v})) = \Lambda_{i,i}\tau_i(\mathbf{v})$ ce qui permet d'itérer le morphisme presque juste en multipliant par les valeurs propres.

Récapitulons :

On utilise les ingrédients suivants :

- La matrice d'incidence
- Ses valeurs propres et vecteurs propres
- Les vecteurs de Parikh
- La notion de parent et les transitions
- Un réseau euclidien
- Les chemins sur T ou Q (selon ce qui nous arrange)

Récapitulons :

On utilise les ingrédients suivants :

- La matrice d'incidence
- Ses valeurs propres et vecteurs propres
- Les vecteurs de Parikh
- La notion de parent et les transitions
- Un réseau euclidien
- Les chemins sur T ou Q (selon ce qui nous arrange)

On peut réussir à borner $\mathbf{x} = \psi(b_i) - \psi(c_i)$ pour b_i et c_i des blocs des suites ancestrales de b et c. On obtient

$$\left.\begin{array}{r} \tau_1(\mathbf{x}) \leq 2.9818 \\ \tau_2(\mathbf{x}) \leq 1.9032 \\ \tau_3(\mathbf{x}) \leq 2.1758 \\ \tau_4(\mathbf{x}) \leq 2.1758 \end{array}\right\} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \leq 6.28$$

Récapitulons :

On utilise les ingrédients suivants :

- La matrice d'incidence
- Ses valeurs propres et vecteurs propres
- Les vecteurs de Parikh
- La notion de parent et les transitions
- Un réseau euclidien
- Les chemins sur T ou Q (selon ce qui nous arrange)

On peut réussir à borner $\mathbf{x} = \psi(b_i) - \psi(c_i)$ pour b_i et c_i des blocs des suites ancestrales de b et c. On obtient

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1(\mathbf{x}) \leq 2.9818 \\ \tau_2(\mathbf{x}) \leq 1.9032 \\ \tau_3(\mathbf{x}) \leq 2.1758 \\ \tau_4(\mathbf{x}) \leq 2.1758 \end{array}\right\} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \leq 6.28$$

En construisant par ordinateur l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{Z}^4$ qui vérifient toutes ces contraintes, on obtient un ensemble $\mathfrak{U}$ de 497 vecteurs possibles.

Deux nombres à retenir :

Deux nombres à retenir :

497

Deux nombres à retenir :

497

32068

Et une question toujours ouverte :

Et une question toujours ouverte :

Est-il possible, sur un alphabet fini, de construire un mot infini qui évite les carrés additifs ?

$$\begin{aligned}\mathbf{w}' = &0102010310141020102301090102123103020821042029032040701 0\\ &203102019104020320459310901021090104019010791014090343\\ &01491019105291023820902802010 41\cdots\end{aligned}$$

Illustration : Peb et Fox.