Colonnes dans les automates cellulaires.

Pierre-Adrien Tahay

Université de Lorraine

27 mars 2018

Définition 1.

Un automate cellulaire est un système dynamique $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ où $\mathcal{A}$ est un ensemble fini et où $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est définie par une règle locale qui agit uniformément et de manière synchrone sur la configuration de l'espace.

Plus précisément il existe un entier $r \geq 0$ appelé le *rayon* de l'automate cellulaire, et une *règle locale* $f : \mathcal{A}^{2r+1} \to \mathcal{A}$ telle que $\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{Z}, F(x)_k = f((x_{k+i})_{-r \leq i \leq r})$.

Automate de la somme modulo 2

Exemple 1.

On se place sur $\mathbb{F}_2$ avec comme règle locale $f(a,b,c) = a + c$.

Automate de la somme modulo 2

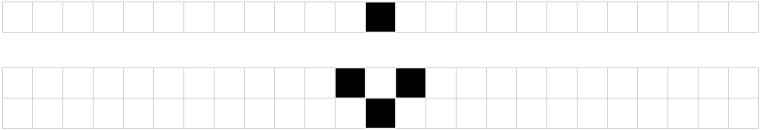
Exemple 1.

On se place sur $\mathbb{F}_2$ avec comme règle locale $f(a,b,c) = a + c$.

Automate de la somme modulo 2

Exemple 1.

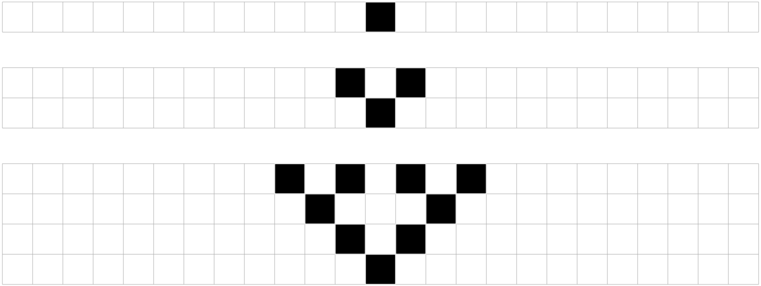
On se place sur $\mathbb{F}_2$ avec comme règle locale $f(a,b,c) = a + c$.



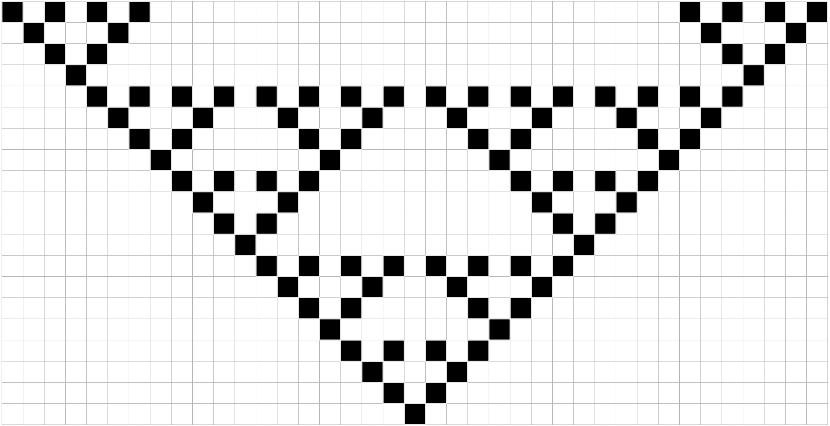
Automate de la somme modulo 2

Exemple 1.

On se place sur $\mathbb{F}_2$ avec comme règle locale $f(a,b,c) = a + c$.



Automate de la somme modulo 2



Définition 2.

Quand $\mathcal{A} = \mathbb{F}_p$, un automate cellulaire F est dit *linéaire* s'il définit une application $\mathbb{F}_p$-linéaire. De manière équivalente, cela signifie que la règle locale de F peut s'écrire $f((x_i)_{-r \leq i \leq r}) = \sum_{i=-r}^{r} \alpha_i x_i$, pour un certain $r \geq 0$ et des coefficients $\alpha_i \in \mathbb{F}_p$.

Définition 2.

Quand $\mathcal{A} = \mathbb{F}_p$, un automate cellulaire F est dit *linéaire* s'il définit une application $\mathbb{F}_p$-linéaire. De manière équivalente, cela signifie que la règle locale de F peut s'écrire $f((x_i)_{-r\leq i\leq r}) = \sum_{i=-r}^{r} \alpha_i x_i$, pour un certain $r \geq 0$ et des coefficients $\alpha_i \in \mathbb{F}_p$.

Définition 3.

Un automate fini déterministe avec sortie (DFAO) est un 6-uplet $(\mathcal{S}, \Sigma_k, \delta, s_0, \mathcal{A}, \omega)$ où $\mathcal{S}$ est un ensemble fini d'"états", $\Sigma_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $s_0 \in \mathcal{S}$ est l'état initial, $\mathcal{A}$ est un alphabet fini, $\omega : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ est la fonction de sortie et $\delta : \mathcal{S} \times \Sigma_k \longrightarrow \mathcal{S}$ est la fonction de transition.

Définition 3.

Un automate fini déterministe avec sortie (DFAO) est un 6-uplet $(\mathcal{S}, \Sigma_k, \delta, s_0, \mathcal{A}, \omega)$ où $\mathcal{S}$ est un ensemble fini d'"états", $\Sigma_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $s_0 \in \mathcal{S}$ est l'état initial, $\mathcal{A}$ est un alphabet fini, $\omega : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ est la fonction de sortie et $\delta : \mathcal{S} \times \Sigma_k \longrightarrow \mathcal{S}$ est la fonction de transition.

Définition 4.

Une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ est dite k-automatique s'il existe un DFAO $(\mathcal{S}, \Sigma_k, \delta, s_0, \mathcal{A}, \omega)$ tel que $u_n = \omega(\delta(s_0, (n)_k))$ pour tout $n \geqslant 0$.

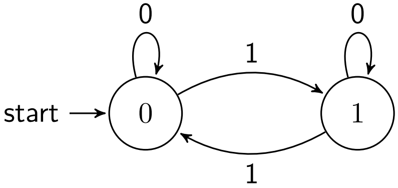
Exemple 2.

La suite de Thue-Morse $(t_n)_{n\geqslant 0} = 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots$ définie par $t_n = 0$ si le nombre de 1 dans la représentation binaire de n est pair et $t_n = 1$ sinon est une suite 2-automatique.

Exemple 2.

La suite de Thue-Morse $(t_n)_{n\geqslant 0} = 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots$ définie par $t_n = 0$ si le nombre de 1 dans la représentation binaire de n est pair et $t_n = 1$ sinon est une suite 2-automatique.

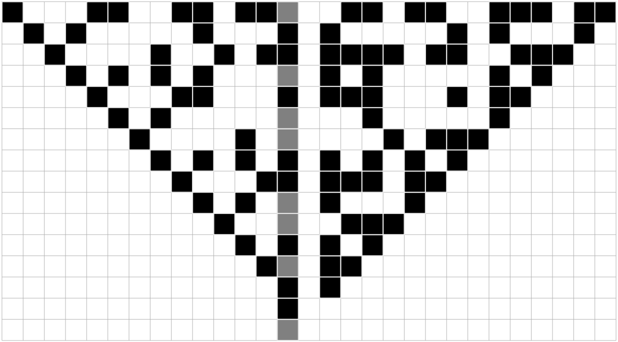
Elle est générée par l'automate suivant, où les deux états sont étiquetés par leurs images par ω :



Théorème 1.(Rowland et Yassawi)(2015)

Soit p un nombre premier et q une puissance d'un nombre premier. Une suite d'éléments de $\mathbb{F}_q$ est p-automatique si et seulement si c'est la colonne d'un diagramme espace-temps d'un automate cellulaire avec mémoire sur $\mathbb{F}_q$ dont les conditions initiales sont périodiques à partir d'un certain rang dans les deux directions.

Construction de la suite de Thue-Morse



Proposition 1.(Critère de Minsky-Papert)

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction croissante et $\pi_f(x) = \#\{n : f(n) \leq x\}$. Si $\lim_{x\to\infty} \pi_f(x)/x = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f(n+1)/f(n) = 1$, alors la suite $u = \mathbf{1}_{f(\mathbb{N})}$ n'est pas automatique.

Suites non automatiques

Proposition 1.(Critère de Minsky-Papert)

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction croissante et $\pi_f(x) = \#\{n : f(n) \leq x\}$. Si $\lim_{x\to\infty} \pi_f(x)/x = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f(n+1)/f(n) = 1$, alors la suite $u = \mathbf{1}_{f(\mathbb{N})}$ n'est pas automatique.

Exemple 3.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. La suite $u = \mathbf{1}_{\mathcal{P}}$ n'est pas automatique.

Suites non automatiques

Proposition 1.(Critère de Minsky-Papert)

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction croissante et $\pi_f(x) = \#\{n : f(n) \leq x\}$. Si $\lim_{x\to\infty} \pi_f(x)/x = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f(n+1)/f(n) = 1$, alors la suite $u = \mathbf{1}_{f(\mathbb{N})}$ n'est pas automatique.

Exemple 3.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. La suite $u = \mathbf{1}_{\mathcal{P}}$ n'est pas automatique.

Exemple 4.

Si $P \in \mathbb{Q}[X]$ est un polynôme de degré $d \geq 2$ tel que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ et P est strictement croissant sur $\mathbb{N}$ alors la suite $u = \mathbf{1}_{P(\mathbb{N})}$ n'est pas automatique.

Proposition 2.

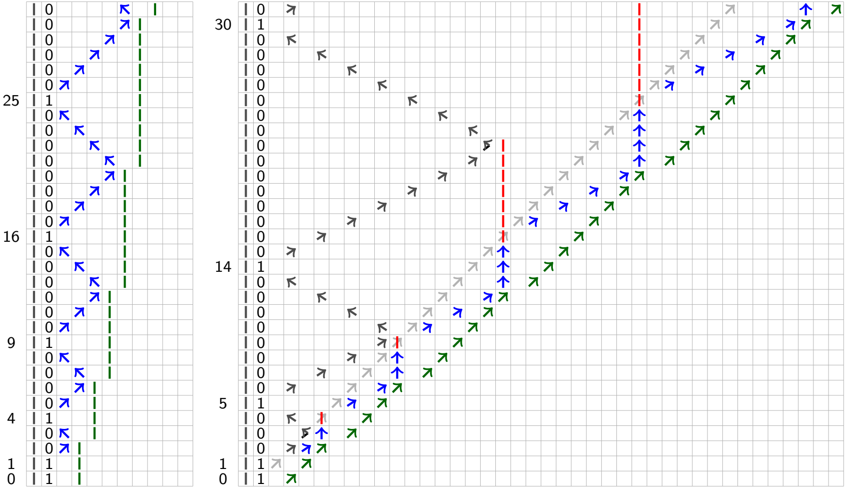
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante à partir d'un certain rang, et soit g la suite des sommes partielles définie par $g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ pour tout $n \geq 0$. Supposons que $u = \mathbf{1}_{f(\mathbb{N})}$ est constructible par un automate cellulaire. Alors $v = \mathbf{1}_{g(\mathbb{N})}$ est aussi constructible par un automate cellulaire.

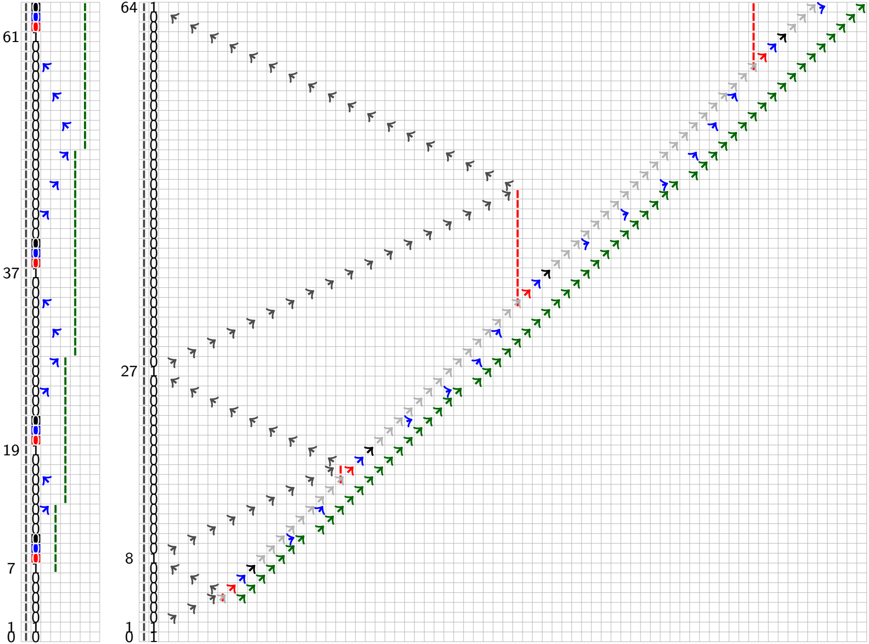
Proposition 2.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante à partir d'un certain rang, et soit g la suite des sommes partielles définie par $g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ pour tout $n \geq 0$. Supposons que $u = \mathbf{1}_{f(\mathbb{N})}$ est constructible par un automate cellulaire. Alors $v = \mathbf{1}_{g(\mathbb{N})}$ est aussi constructible par un automate cellulaire.

Théorème 2.

Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré $d \geq 2$ avec $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$. Alors la suite $u = \mathbf{1}_{P(\mathbb{N})}$ est constructible par un automate cellulaire.


25
16
9
4
1
0
30
14
5
1
0


61
37
19
7
1
0
64
27
8
1
0

Merci pour votre attention !