

Combinatoire et couplage

Exercice 1. (*Hammersley 1972, Erdős & Szekeres 1933*) Montrer que, d'une suite de $mn + 1$ nombres, on peut extraire soit une sous-suite croissante de longueur $m + 1$, soit une sous-suite décroissante de longueur $n + 1$.

Exercice 2. Montrer que pour 2 variables aléatoires X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes deux à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, et pour $A \in \mathcal{E}$,

$$|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y).$$

Montrer que si X suit la loi de Bernoulli et Y la loi de Poisson, toutes deux de paramètre $p \in [0, 1]$, alors

$$|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq p(1 - e^{-p}) \leq p^2.$$

On pourra construire explicitement X et Y comme fonctions croissantes d'une même variable aléatoire U uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3. a. On se donne un nombre Z suivant la loi exponentielle de paramètre 1, définie par

$$\mathbb{P}(Z \leq x) = (1 - e^{-x}) \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

et on pose $X = \lceil aZ \rceil$. Calculer a pour que X suive la loi géométrique de paramètre p , définie par

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \mathbf{1}_{k \geq 1}.$$

b. Montrer que si Z_n suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$, alors Z_n/n converge en loi vers Z .

Exercice 4. On note $C_n(\omega)$, resp. $D_n(\omega)$, les longueurs des plus grandes suites croissantes (resp. décroissantes) d'une permutation aléatoire ω tirée au hasard du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $C_n(\omega)$ et $D_n(\omega)$ ont même loi. À l'aide de l'Exercice 1, en déduire que

$$\mathbb{E}[C_n] \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Exercice 5. Avec les notations de l'Exercice 4, montrer que

$$\mathbb{P}(C_n \geq k) \leq \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \leq \left(\frac{e^2 n}{k^2} \right)^k,$$

puis que

$$\mathbb{E}[C_n] \leq 2e\sqrt{n} + n 2^{-2e\sqrt{n}} \leq 6\sqrt{n}.$$

Exercice 6. *Lemme de Fekete.* Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall n, p \geq 1, \quad u_{n+p} \geq u_n + u_p.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est *sur-additive*. On souhaite montrer que la suite $(u_n/n)_{n \geq 1}$ converge vers $\sup_{n \geq 1} u_n/n$. Soit $p \geq 1$ fixé et soit $n \geq 1$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par p . Montrer que $u_n \geq qu_p + u_r$. En déduire que :

$$\liminf_n \frac{u_n}{n} \geq \frac{u_p}{p},$$

puis que :

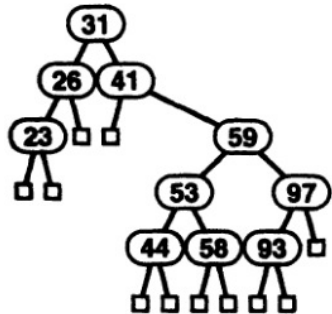
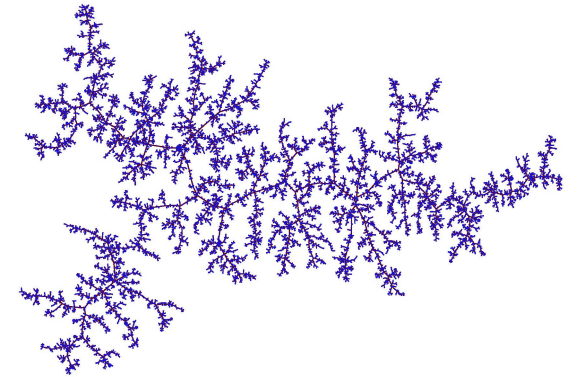
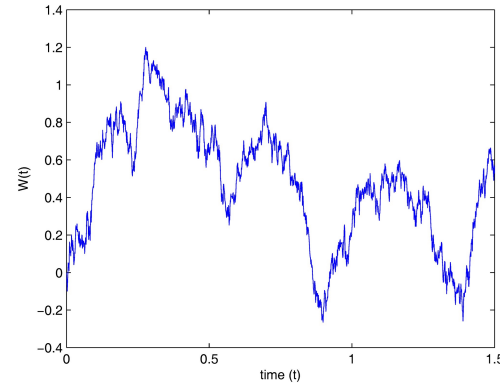
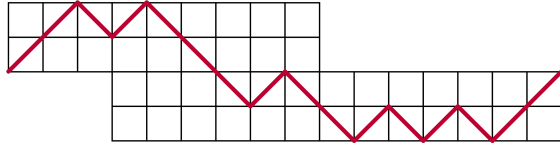
$$\liminf_n \frac{u_n}{n} \geq \sup_{p \geq 1} u_p/p,$$

et conclure. *Application* : montrer que la suite $\mathbb{E}[C_n]$ est *sous-additive* ; que peut-on en déduire ?

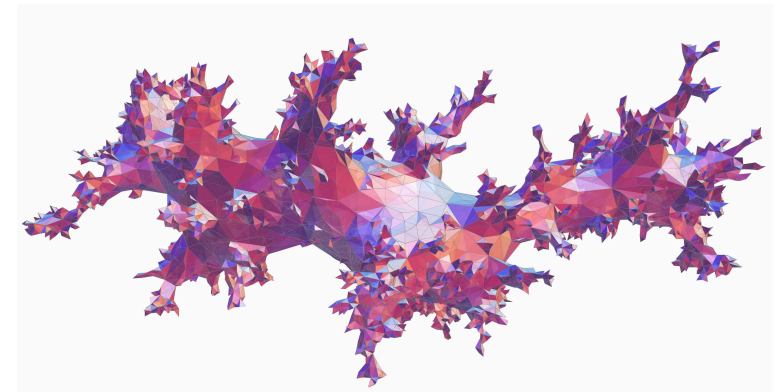
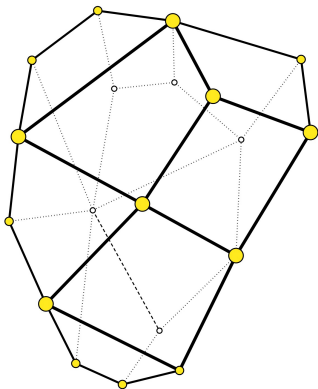
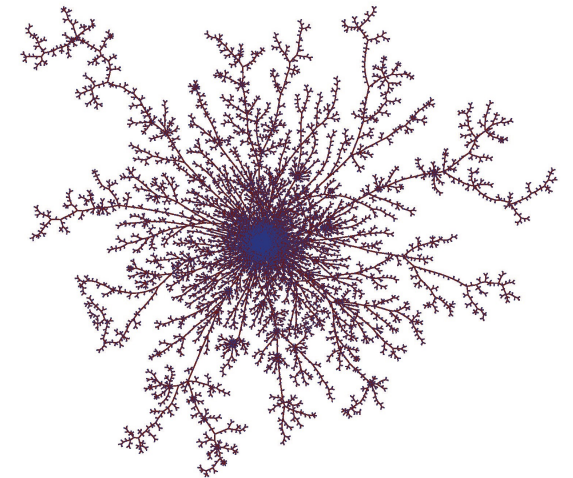
Exercice 7. Montrer*** que $\mathbb{E}[C_n]/\sqrt{n}$ converge vers une limite γ . Montrer***** que $\gamma = 2$.

Combinatoire et couplage probabiliste

Philippe Chassaing-Irène Marcovici



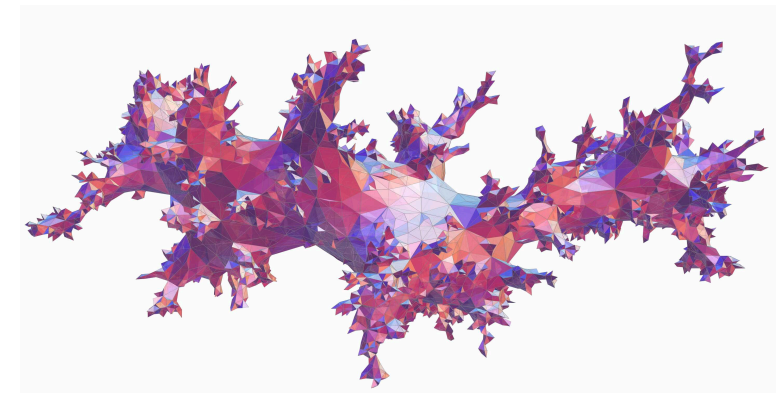
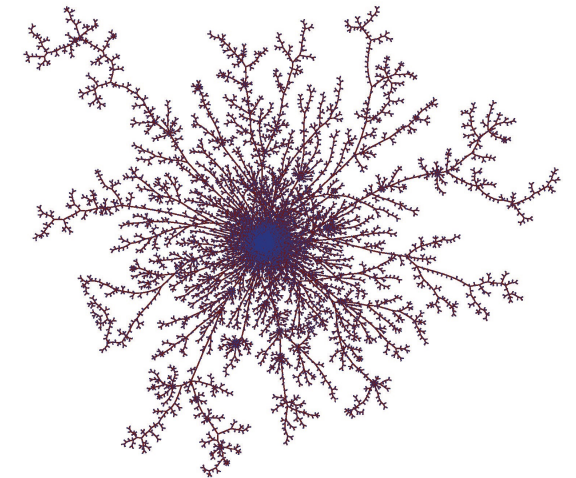
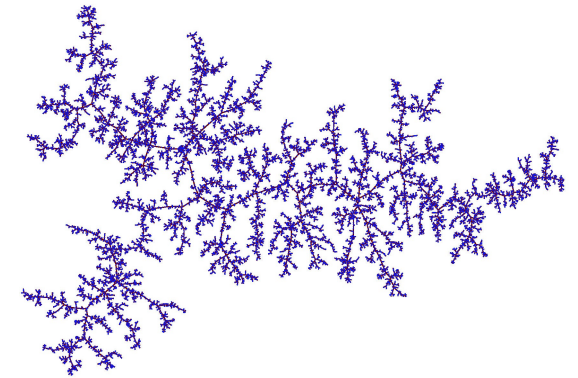
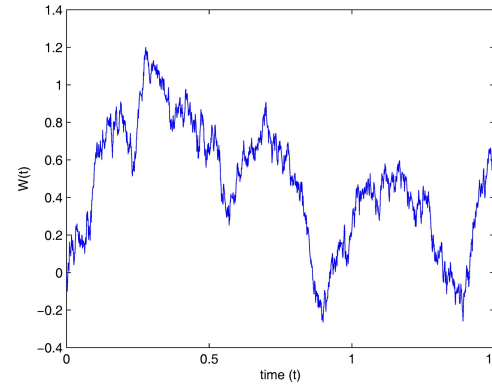
convergence
en loi



EJCIM2018

Combinatoire et couplage probabiliste

Philippe Chassaing-Irène Marcovici



① Convergence en loi

② Couplage avec la loi uniforme

③ Couplage avec la loi exponentielle
les processus de Poisson

④ Couplage avec le mouvement Brownien.

EJCIM2018

Exercice: De toute suite de $mn+1$ nombres on peut extraire :

- soit une suite $\nearrow$ de longueur $n+1$,
- soit une suite $\searrow$ de longueur $m+1$.

Exercice: De toute suite de $mn+1$ nombres on peut extraire :

- soit une suite $\nearrow$ de longueur $n+1$,
- soit une suite $\searrow$ de longueur $m+1$.

Application: en **moyenne**, la + longue suite $\nearrow$

d'une permutation aléatoire $\omega \in \mathcal{S}_n$

est de longueur a_n

avec $a_n = \mathcal{O}(\sqrt{n})$

$$a_n = \Theta(\sqrt{n})$$

$$a_n \sim \gamma \sqrt{n}$$

$$\gamma = ?$$

Il s'agit, en combinatoire ou bien en analyse d'algorithme, assez souvent, de mettre en évidence un comportement asymptotique pour un paramètre X_n d'une structure combinatoire aléatoire $\mathcal{C}_n$

$$\mathbb{E}(X_n) \sim c\sqrt{n}$$

et pour un autre paramètre Y_n de la structure

$$\mathbb{E}(Y_n) \sim \tilde{c} n^{3/2}.$$

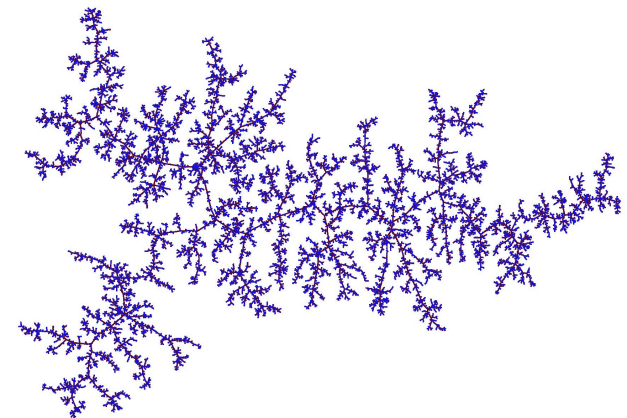
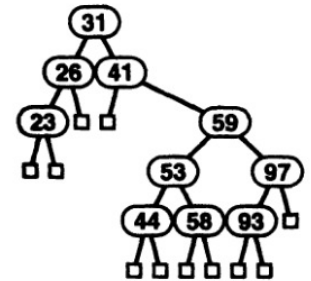
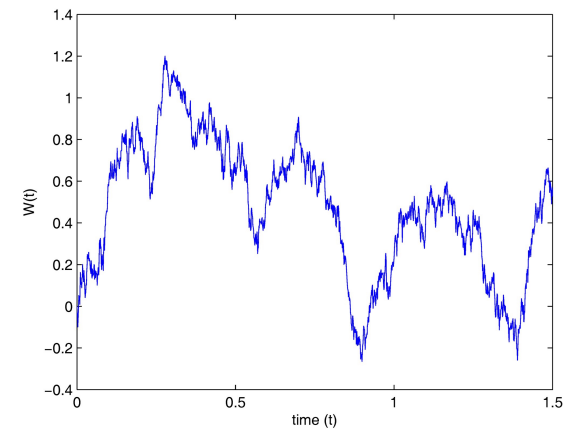
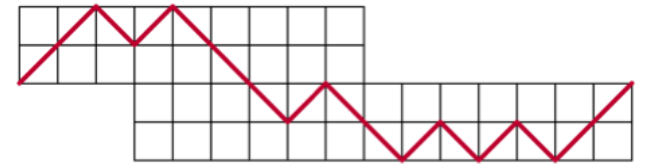
explication unificatrice ??

$$\mathcal{C}_n \times \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{loi}]{n} \mathcal{C}_\infty$$

Donc, parce que $\frac{X_n}{\sqrt{n}} = \psi\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{C}_n\right)$ et $c = \mathbb{E}(\psi(\mathcal{C}_\infty))$

$$Y_n n^{-3/2} = \theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{C}_n\right) \text{ et } \tilde{c} = \mathbb{E}(\theta(\mathcal{C}_\infty))$$

on déduit que $\mathbb{E}(X_n) \sim c\sqrt{n}$ et $\mathbb{E}(Y_n) \sim \tilde{c} n^{3/2}$.



Convergence en loi:

Résultat fondamental: le **théorème central limite** De Moivre 1733 }
Formule de Stirling

Laplace 1812

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n} \sigma} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$X_1 + \dots + X_n = nm + \sqrt{n} \sigma Z_n \quad \text{où } Z_n = \mathcal{O}(1) \quad Z_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

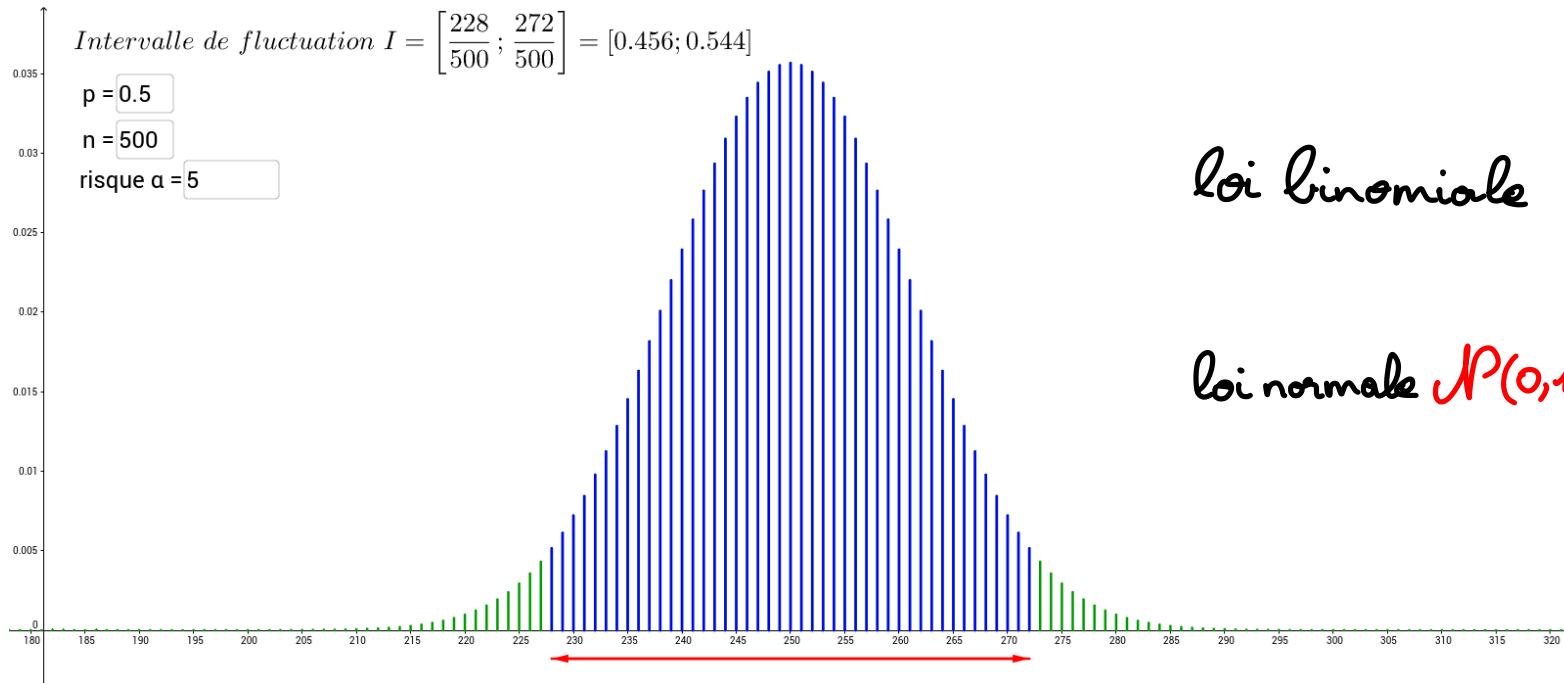
Convergence en loi:

Résultat fondamental: le **théorème central limite** De Moivre 1733 }
Formule de Stirling
Laplace 1812

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n} \sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

$$X_1 + \dots + X_n = \cancel{nm} + \sqrt{n} \sigma Z_n \text{ où } Z_n = \mathcal{O}(1) \quad Z_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

cas particulier intéressant: **$m=0$**



loi binomiale $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathbb{1}_{0 \leq k \leq n}$

loi normale **$\mathcal{N}(0, 1)$** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Convergence en loi

Définitions: $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$

① $\forall \phi$ cont bornée $\lim_n \mathbb{E}[\phi(X_n)] = \mathbb{E}[\phi(X)]$

② $\lim_n \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A) \quad \forall A \text{ t.q. } \mathbb{P}(X \in \partial A) = 0.$

Convergence en loi

Définitions: $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$

① $\forall \phi$ cont bornée $\lim_n \mathbb{E}[\phi(X_n)] = \mathbb{E}[\phi(X)]$

② $\lim_n \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A) \quad \forall A \text{ tq } \mathbb{P}(X \in \partial A) = 0.$

③ $\lim_n \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \forall x \text{ tq } \mathbb{P}(X = x) = 0.$

④ $\lim_n \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \mathbb{E}[e^{itX}] \quad \forall t \in \mathbb{R}$

⑤ Thme de représentation de Skorohod:

$\exists (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \exists \tilde{X}_n, \tilde{X} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow ??$ tels que:

$\tilde{X}_n \stackrel{\text{loi}}{\simeq} X_n$ et $\tilde{X} \stackrel{\text{loi}}{\simeq} X$ et $\forall \omega \in \Omega \lim_n \tilde{X}_n(\omega) = \tilde{X}(\omega).$

Convergence en loi

$$U_n \sim \mathcal{U}_{\{1,2,\dots,n\}}$$

$$X_n = \frac{U_n}{n} \quad X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$$

Définitions: $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$

$$\textcircled{1} \quad \forall \phi \text{ cont bornée} \quad \lim_n \mathbb{E}[\phi(X_n)] = \mathbb{E}[\phi(X)]$$

$$\lim_n \sum \frac{1}{n} \phi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \phi(t) dt$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_n \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A) \quad \forall A \text{ tq } \mathbb{P}(X \in \partial A) = 0.$$

exemple $A = \mathbb{Q}$

$$\textcircled{3} \quad \lim_n \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \forall x \text{ tq } \mathbb{P}(X=x) = 0.$$

$$\lim_n \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_n \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \mathbb{E}[e^{itX}] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{it \frac{k}{n}} \xrightarrow{n} \frac{e^{it} - 1}{it}$$

⑤ Thme de représentation de Skorohod:

$\exists (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \exists \tilde{X}_n, \tilde{X} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow ??$ tels que:

$\tilde{X}_n \stackrel{\text{loi}}{=} X_n$ et $\tilde{X} \stackrel{\text{loi}}{=} X$ et $\forall \omega \in \Omega \quad \lim_n \tilde{X}_n(\omega) = \tilde{X}(\omega).$

Résultat fondamental: le théorème central limite De Moivre 1733
Laplace 1812 Formule de Stirling

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n} \sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$X_1 + \dots + X_n = nm + \sqrt{n} \sigma Z_n \quad \text{où } Z_n = \mathcal{O}(1) \quad Z_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

Convergence en loi

$$U_n \sim U_{\{1,2,\dots,n\}} \\ X_n = \frac{U_n}{n} \quad X \sim U_{[0,1]}$$

Définitions: $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$

$$\textcircled{1} \quad \forall \phi \text{ cont bornée} \quad \lim_n \mathbb{E}[\phi(X_n)] = \mathbb{E}[\phi(X)]$$

$$\lim_n \sum \frac{1}{n} \phi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \phi(t) dt$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_n \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A) \quad \forall A \text{ t.q. } \mathbb{P}(X \in \partial A) = 0.$$

exemple $A = \mathbb{Q}$
 $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

$$\textcircled{3} \quad \lim_n \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \forall x \text{ t.q. } \mathbb{P}(X=x) = 0.$$

$$\lim_n \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_n \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \mathbb{E}[e^{itX}] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{it \frac{k}{n}} \xrightarrow{n} \frac{e^{it} - 1}{it}$$

⑤ Thme de représentation de Skorohod:

$$X(\omega) = U(\omega) \rightarrow U_n(\omega) = \lceil n U(\omega) \rceil$$

$$\exists (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \exists \tilde{X}_n, \tilde{X} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow ?? \text{ tels que:}$$

$$\tilde{X}_n \stackrel{\text{loi}}{=} X_n \text{ et } \tilde{X} \stackrel{\text{loi}}{=} X \text{ et } \forall \omega \in \Omega \quad \lim_n \tilde{X}_n(\omega) = \tilde{X}(\omega).$$

$$\rightarrow X_n(\omega) = \frac{\lceil n U(\omega) \rceil}{n} \rightarrow U(\omega)$$

$$\text{car } n U(\omega) \leq \lceil n U(\omega) \rceil \leq n U(\omega) + 1$$

$$\rightarrow U(\omega) \leq X_n(\omega) \leq U(\omega) + \frac{1}{n}$$

Exemple: permutations aléatoires.

Couplage: $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ des v.a.r. (p.e. uniformes sur $[0, 1]$)

$\omega(k) = \#\{j \in [n] \mid X_j \leq X_k\} \rightarrow \omega$ est **uniforme** sur $\mathcal{S}_n$.

Autre caractérisation: $\omega^{-1} = \tau \quad X_{\tau(1)} < X_{\tau(2)} < \dots < X_{\tau(n)}$

$\omega(1) = T_n(\omega)$ a même loi que la taille du cycle contenant 1.

$$T_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k \leq X_1}$$

$$\mathbb{E}[(T_n - nX_1)^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_1^n (\mathbb{1}_{X_k \leq X_1} - X_1)\right)^2\right]$$

$$= \int_0^1 \mathbb{E}\left[\left(\sum_2^n (\mathbb{1}_{X_k \leq x} - x) + (1-x)\right)^2\right] dx$$

$$= \int_0^1 ((n-1)x(1-x) + (1-x)^2) dx = \frac{n+1}{6}$$

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{loi}} X_1 \quad \text{car} \quad \left\| \frac{T_n}{n} - X_1 \right\|_2 = \frac{n+1}{6n^2} \sim \frac{1}{6n}.$$

Exemple: permutations aléatoires.

$T_n(\omega)$: la taille du cycle contenant 1.

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{loi}} U_{[0,1]}$$

Généralisation à la suite des tailles,
à diverses décompositions (Lyndon)

aabbbaababbbaaba

Exemple: permutations aléatoires.

$T_n(\omega)$: la taille du cycle contenant 1.

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{loi}} U_{[0,1]}$$

Généralisation à la suite des tailles,
à diverses décompositions (Lyndon)

aabbbaababbbaaba



Exercice: un bâton de longueur 1 est brisé en morceaux de tailles $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$
puis recollé au hasard. Montrer que la position P du 1^{er} morceau est
proche d'uniforme ... $E[(P-U)^2] \leq \max x_i$ si les morceaux x_i sont petits

Inégalité de Le Cam

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables de Bernoulli $\begin{cases} 1 & p_i \\ 0 & 1-p_i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$

$$\lambda = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \Sigma_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

$$\mathbb{P}(\Sigma_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{1}_{k \geq 0}$$

$$\text{Alors } \forall A \subset \mathbb{N}, \quad |\mathbb{P}(S_n \in A) - \mathbb{P}(\Sigma_n \in A)| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \lambda \times \max p_i.$$

$$\stackrel{||}{\lambda^2/n} \text{ si } p_i = \lambda/n \quad \forall i$$

$$S_n \sim \text{Bin}(n, \lambda/n)$$

S_n : nombre de points isolés du graphe aléatoire d'Erdős Rényi au voisinage du seuil de connexité.

nombre de cycles de taille k d'une permutation aléatoire $\mathcal{P}(\frac{1}{k})$

Inégalité de Le Cam

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables de Bernoulli $\begin{cases} 1 & p_i \\ 0 & 1-p_i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$

$$\lambda = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \Sigma_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

$$\mathbb{P}(\Sigma_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{1}_{k \geq 0}$$

Alors $\forall A \subset \mathbb{N}, |\mathbb{P}(S_n \in A) - \mathbb{P}(\Sigma_n \in A)| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \lambda \times \max p_i$.

$$\text{Pe. } \mathbb{P}(S_n = k) = \prod_1^n (1-p_i) \times \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \prod_{j \in J} \frac{p_j}{1-p_j} \quad \approx \quad \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad ???$$

Inégalité de Le Cam

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables de Bernoulli $\begin{cases} 1 & p_i \\ 0 & 1-p_i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$

$$\lambda = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \Sigma_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

$$\mathbb{P}(\Sigma_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{1}_{k \geq 0}$$

Alors $\forall A \subset \mathbb{N}, |\mathbb{P}(S_n \in A) - \mathbb{P}(\Sigma_n \in A)| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \lambda \times \max p_i$.

$$\text{Pe. } \mathbb{P}(S_n = k) = \prod_1^n (1-p_i) \times \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \prod_{j \in J} \frac{p_j}{1-p_j} \quad \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad ???$$

$$\mathbb{E}[e^{itS_n}] = \prod_1^n (1-p_j + p_j e^{it}) \approx \prod_1^n e^{p_j(e^{it}-1)} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Inégalité de Le Cam

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables de Bernoulli $\begin{cases} 1 & p_i \\ 0 & 1-p_i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$

$$\lambda = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \Sigma_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$$
$$\mathbb{P}(\Sigma_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{1}_{k \geq 0}$$

Alors $\forall A \subset \mathbb{N}, \quad |\mathbb{P}(S_n \in A) - \mathbb{P}(\Sigma_n \in A)| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \lambda \times \max p_i.$

Si on peut construire (X_k, Y_k) tel que $Y_k \sim \mathcal{P}(p_k)$ et

$$\mathbb{P}(X_k \neq Y_k) \leq p_k^2,$$

alors $\Sigma_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Par ailleurs,

$$|\mathbb{P}(S_n \in A) - \mathbb{P}(\Sigma_n \in A)| \leq \mathbb{P}(S_n \neq \Sigma_n)$$

Inégalité de Le Cam

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables de Bernoulli $\begin{cases} 1 & p_i \\ 0 & 1-p_i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$

$$\lambda = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \Sigma_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$$
$$\mathbb{P}(\Sigma_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{1}_{k \geq 0}$$

Alors $\forall A \subset \mathbb{N}, |\mathbb{P}(S_n \in A) - \mathbb{P}(\Sigma_n \in A)| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \lambda \times \max p_i$.

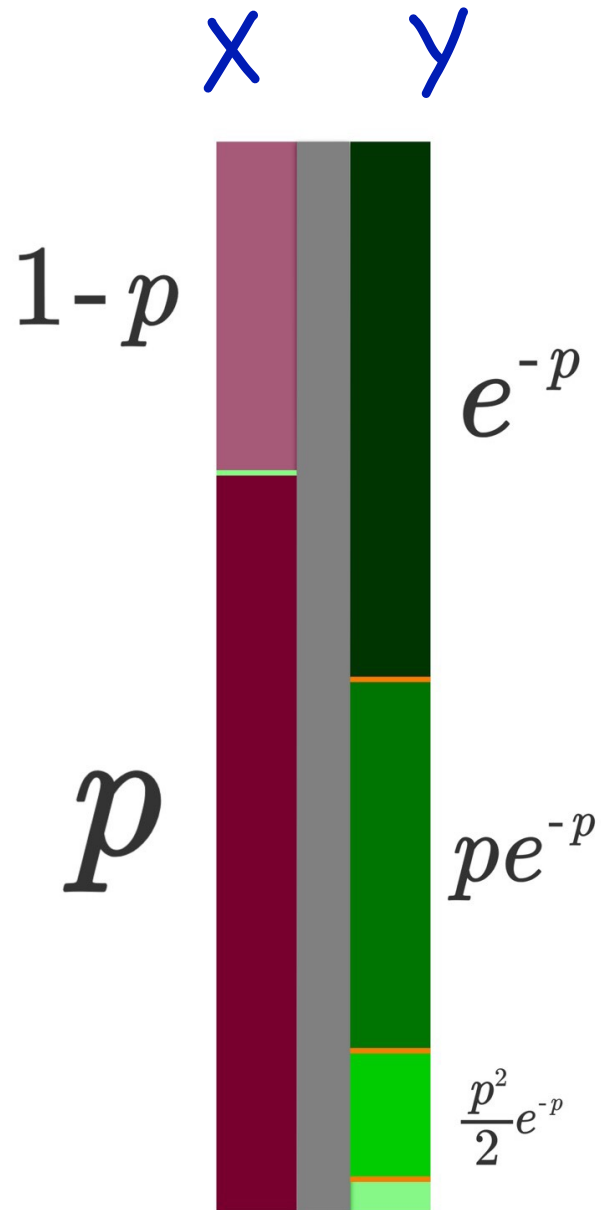
Si on peut construire (X_k, Y_k) tel que $Y_k \sim \mathcal{P}(p_k)$ et

$$\mathbb{P}(X_k \neq Y_k) \leq p_k^2,$$

alors $\Sigma_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Par ailleurs,

$$|\mathbb{P}(S_n \in A) - \mathbb{P}(\Sigma_n \in A)| \leq \mathbb{P}(S_n \neq \Sigma_n)$$
$$\leq \mathbb{P}(\exists k \text{ tq } X_k \neq Y_k) \leq \sum_{k=1}^n p_k^2$$

Inégalité de Le Cam

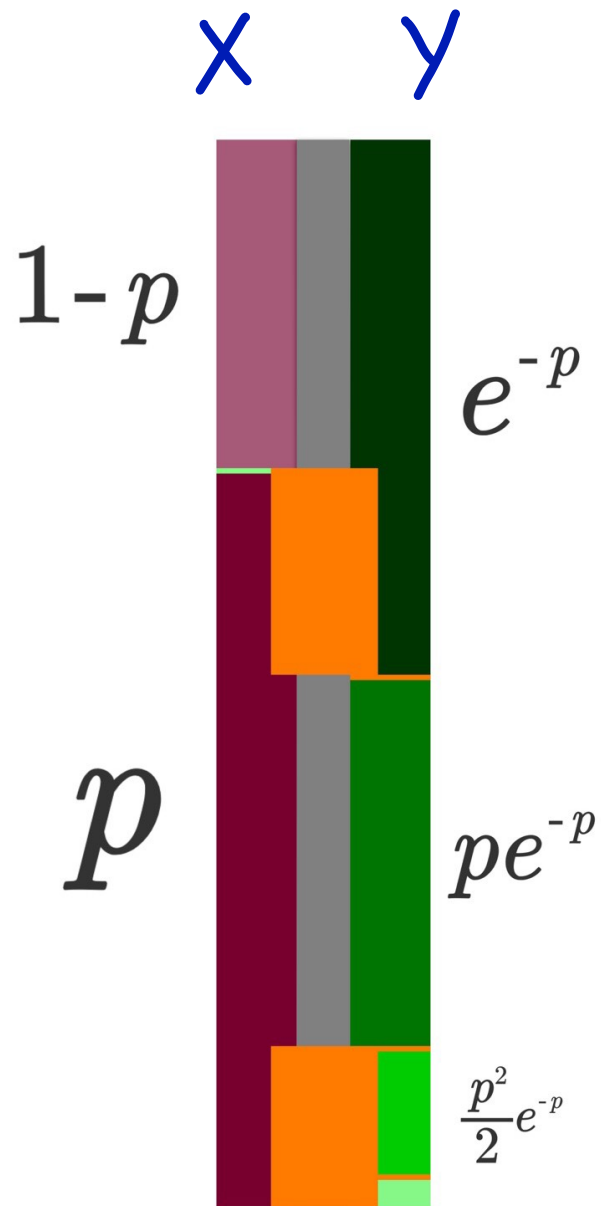


Couplage Bernoulli-Poisson

$p=\ln(2)$	Bernoulli(p)	Poisson(p)
0	0,307	0,500
1	0,693	0,347
2		0,120
3		0,028
...		0,005

$$P(Y \neq X) = p(1 - e^{-p}) \leq p^2$$

Inégalité de Le Cam



Couplage Bernoulli-Poisson

$p=\ln(2)$	Bernoulli(p)	Poisson(p)
0	0,307	0,500
1	0,693	0,347
2		0,120
3		0,028
...		0,005

$$P(Y \neq X) = p(1 - e^{-p}) \leq p^2$$

Exemple: permutations aléatoires.

$$D_n(\omega) = \text{le nombre de descentes d' } \omega \\ = \# \{k : 1 \leq k \leq n-1, \omega_k > \omega_{k+1}\}$$

$$P(D_n=k) = \frac{\langle k \rangle}{n!} \leftarrow \text{nombre eulérien}$$

$$\omega_k > \omega_{k+1} \Leftrightarrow X_k > X_{k+1}$$

$$\text{Si on prend } X_k = \{U_1 + U_2 + \dots + U_k\} \\ = \{X_{k-1} + U_k\} \quad \text{où } \{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

$$\text{alors } D_n(\omega) = \lfloor U_1 + U_2 + \dots + U_n \rfloor \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

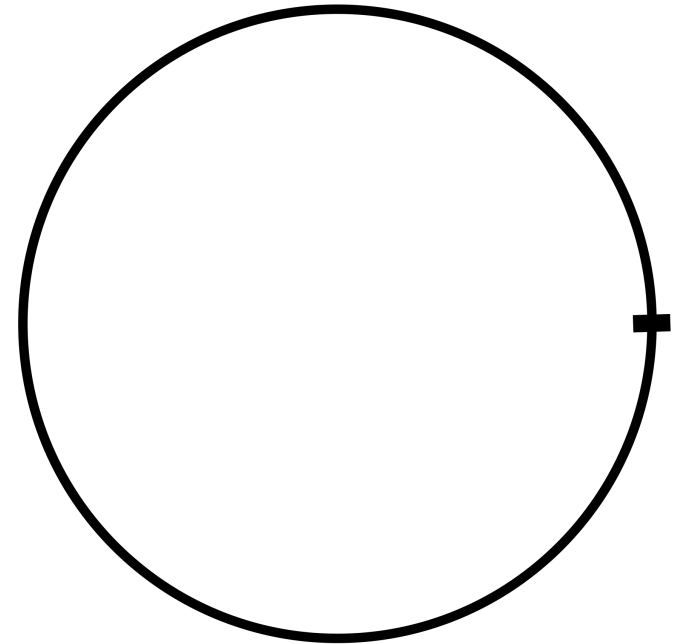
$$\text{donc } \frac{D_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

ce qui donne aussi une estimation précise de $\langle k \rangle$.

Exemple: permutations aléatoires.

Eulérien

U	Somme	X	ω
0,416	0,416	0,416	4
0,329	0,746	0,746	8
0,579	1,325	0,325	3
0,390	1,715	0,715	7
0,988	2,703	0,703	6
0,415	3,117	0,117	2
0,915	4,033	0,033	1
0,574	4,607	0,607	5
0,249	4,857	0,857	9



$D_n(\omega)$ = le nombre de descentes d' ω
 $= \# \{k : 1 \leq k \leq n-1, \omega_k > \omega_{k+1}\}$

$$P(D_n=k) = \frac{\langle k \rangle}{n!} \leftarrow \text{nombre eulérien}$$

$$\omega_k > \omega_{k+1} \Leftrightarrow X_k > X_{k+1}$$

Si on prend $X_k = \{U_1 + U_2 + \dots + U_k\}$
 $= \{X_{k-1} + U_k\}$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

alors $D_n(\omega) = \lfloor U_1 + U_2 + \dots + U_n \rfloor \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n$

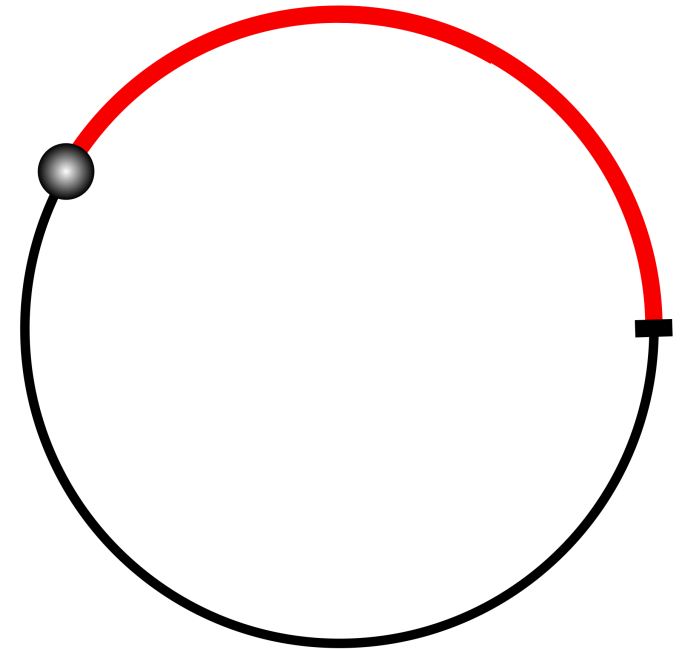
donc $\frac{D_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

ce qui donne aussi une estimation précise de $\langle k \rangle$.

Exemple: permutations aléatoires.

Eulérien

U	Somme	X	ω
→ 0,416	0,416	0,416	4
0,329	0,746	0,746	8
0,579	1,325	0,325	3
0,390	1,715	0,715	7
0,988	2,703	0,703	6
0,415	3,117	0,117	2
0,915	4,033	0,033	1
0,574	4,607	0,607	5
0,249	4,857	0,857	9



$D_n(\omega)$ = le nombre de descentes d' ω
 $= \# \{k : 1 \leq k \leq n-1, \omega_k > \omega_{k+1}\}$

$$P(D_n=k) = \frac{\langle k \rangle}{n!} \leftarrow \text{nombre eulérien}$$

$$\omega_k > \omega_{k+1} \Leftrightarrow X_k > X_{k+1}$$

Si on prend $X_k = \{U_1 + U_2 + \dots + U_k\}$
 $= \{X_{k-1} + U_k\}$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

alors $D_n(\omega) = \lfloor U_1 + U_2 + \dots + U_n \rfloor \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n$

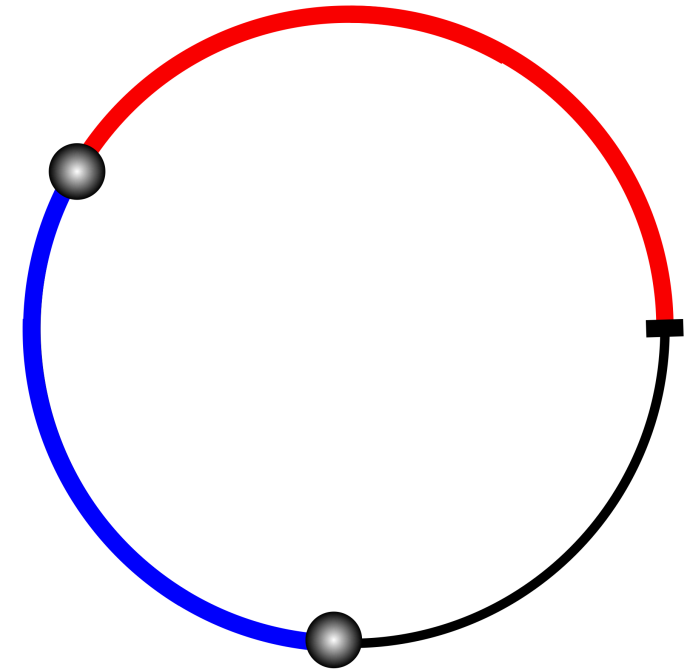
donc $\frac{D_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

ce qui donne aussi une estimation précise de $\langle k \rangle$.

Exemple: permutations aléatoires.

Eulérien

U	Somme	X	ω
0,416	0,416	0,416	4
0,329	0,746	0,746	8
0,579	1,325	0,325	3
0,390	1,715	0,715	7
0,988	2,703	0,703	6
0,415	3,117	0,117	2
0,915	4,033	0,033	1
0,574	4,607	0,607	5
0,249	4,857	0,857	9



$D_n(\omega)$ = le nombre de descentes d' ω
 $= \# \{k : 1 \leq k \leq n-1, \omega_k > \omega_{k+1}\}$

$$P(D_n=k) = \frac{\langle k \rangle}{n!} \leftarrow \text{nombre eulérien}$$

$$\omega_k > \omega_{k+1} \Leftrightarrow X_k > X_{k+1}$$

Si on prend $X_k = \{U_1 + U_2 + \dots + U_k\}$
 $= \{X_{k-1} + U_k\}$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

alors $D_n(\omega) = \lfloor U_1 + U_2 + \dots + U_n \rfloor \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n$

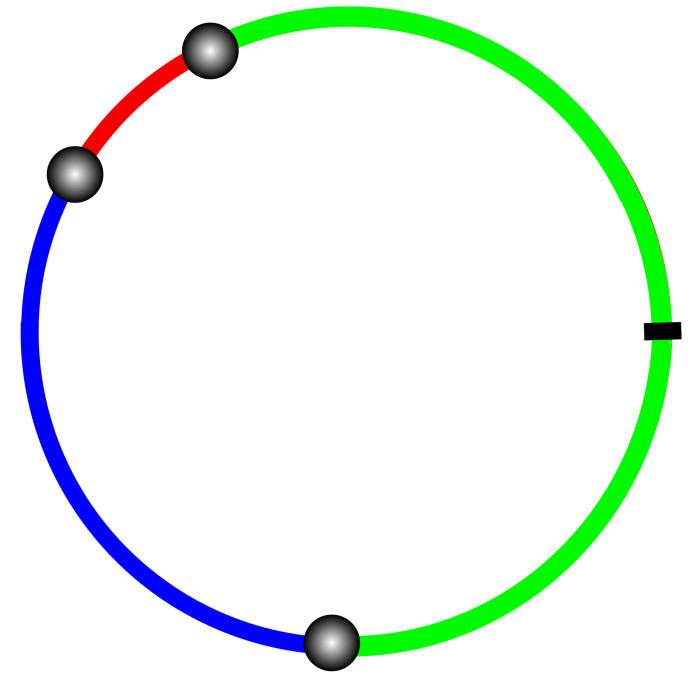
donc $\frac{D_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

ce qui donne aussi une estimation précise de $\langle k \rangle$.

Exemple: permutations aléatoires.

Eulérien

U	Somme	X	ω
0,416	0,416	0,416	4
0,329	0,746	0,746	8
0,579	1,325	0,325	3
0,390	1,715	0,715	7
0,988	2,703	0,703	6
0,415	3,117	0,117	2
0,915	4,033	0,033	1
0,574	4,607	0,607	5
0,249	4,857	0,857	9



$D_n(\omega)$ = le nombre de descentes d' ω
 $= \# \{k : 1 \leq k \leq n-1, \omega_k > \omega_{k+1}\}$

$$P(D_n=k) = \frac{\langle k \rangle}{n!} \leftarrow \text{nombre eulérien}$$

$$\omega_k > \omega_{k+1} \Leftrightarrow X_k > X_{k+1}$$

Si on prend $X_k = \{U_1 + U_2 + \dots + U_k\}$
 $= \{X_{k-1} + U_k\}$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

alors $D_n(\omega) = \lfloor U_1 + U_2 + \dots + U_n \rfloor \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n$

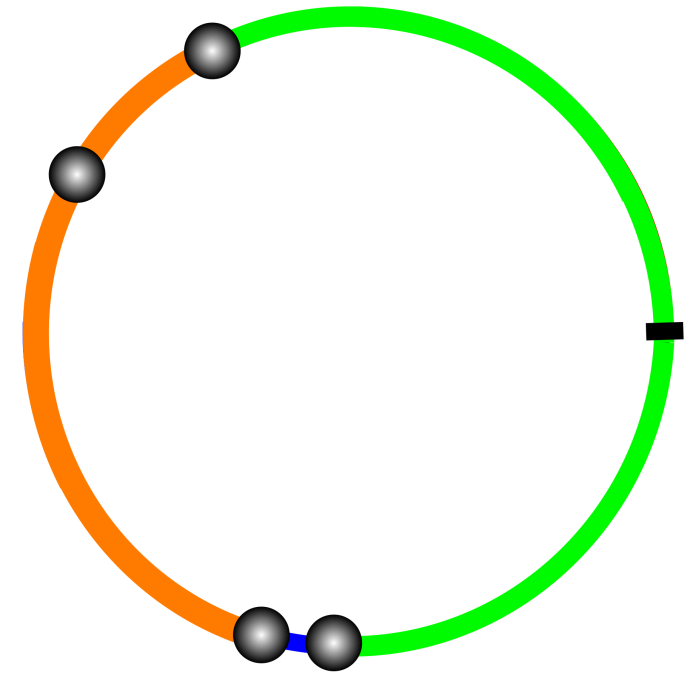
donc $\frac{D_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

ce qui donne aussi une estimation précise de $\langle k \rangle$.

Exemple: permutations aléatoires.

Eulérien

U	Somme	X	ω
0,416	0,416	0,416	4
0,329	0,746	0,746	8
0,579	1,325	0,325	3
0,390	1,715	0,715	7
0,988	2,703	0,703	6
0,415	3,117	0,117	2
0,915	4,033	0,033	1
0,574	4,607	0,607	5
0,249	4,857	0,857	9



$D_n(\omega)$ = le nombre de descentes d' ω
 $= \# \{k : 1 \leq k \leq n-1, \omega_k > \omega_{k+1}\}$

$$P(D_n=k) = \frac{\langle k \rangle}{n!} \leftarrow \text{nombre eulérien}$$

$$\omega_k > \omega_{k+1} \Leftrightarrow X_k > X_{k+1}$$

Si on prend $X_k = \{U_1 + U_2 + \dots + U_k\}$
 $= \{X_{k-1} + U_k\}$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

alors $D_n(\omega) = \lfloor U_1 + U_2 + \dots + U_n \rfloor \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n$

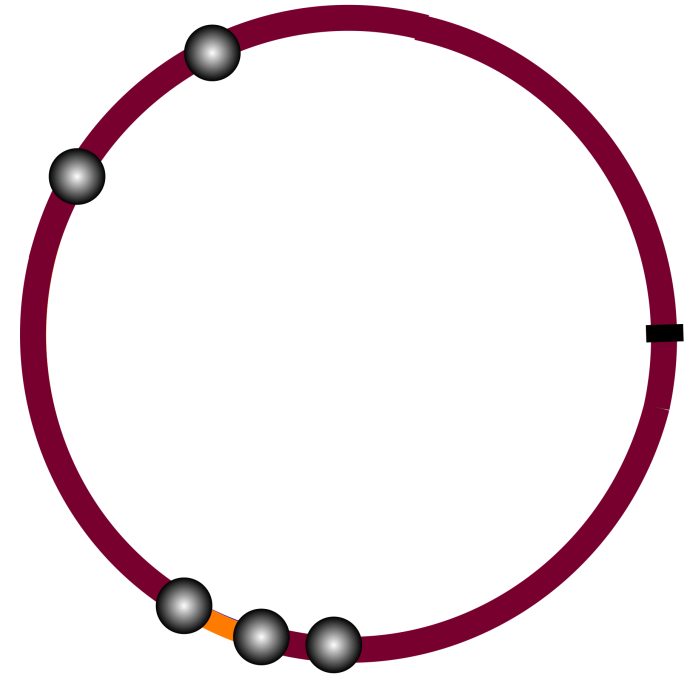
donc $\frac{D_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

ce qui donne aussi une estimation précise de $\langle k \rangle$.

Exemple: permutations aléatoires.

Eulérien

U	Somme	X	ω
0,416	0,416	0,416	4
0,329	0,746	0,746	8
0,579	1,325	0,325	3
0,390	1,715	0,715	7
0,988	2,703	0,703	6
0,415	3,117	0,117	2
0,915	4,033	0,033	1
0,574	4,607	0,607	5
0,249	4,857	0,857	9



$D_n(\omega)$ = le nombre de descentes d' ω
 $= \# \{k : 1 \leq k \leq n-1, \omega_k > \omega_{k+1}\}$

$$P(D_n=k) = \frac{\langle k \rangle}{n!} \leftarrow \text{nombre eulérien}$$

$$\omega_k > \omega_{k+1} \Leftrightarrow X_k > X_{k+1}$$

Si on prend $X_k = \{U_1 + U_2 + \dots + U_k\}$
 $= \{X_{k-1} + U_k\}$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

alors $D_n(\omega) = \lfloor U_1 + U_2 + \dots + U_n \rfloor \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n$

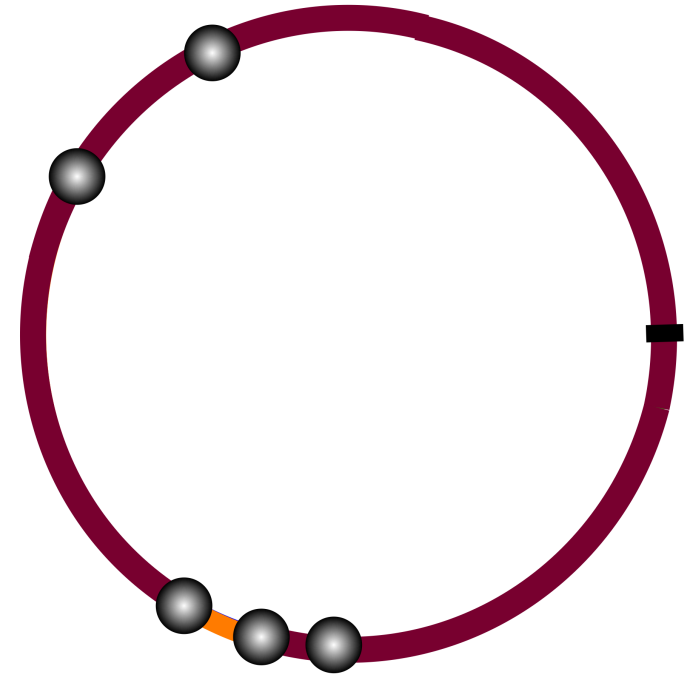
donc $\frac{D_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

ce qui donne aussi une estimation précise de $\langle k \rangle$.

Exemple: permutations aléatoires.

Eulérien

U	Somme	X	ω
0,416	0,416	0,416	4
0,329	0,746	0,746	8
0,579	1,325	0,325	3
0,390	1,715	0,715	7
0,988	2,703	0,703	6
0,415	3,117	0,117	2
0,915	4,033	0,033	1
0,574	4,607	0,607	5
0,249	4,857	0,857	9



$D_n(\omega)$ = le nombre de descentes d' ω
 $= \# \{k : 1 \leq k \leq n-1, \omega_k > \omega_{k+1}\}$

$$P(D_n=k) = \frac{\langle k \rangle}{n!} \leftarrow \text{nombre eulérien}$$

$$\omega_k > \omega_{k+1} \Leftrightarrow X_k > X_{k+1}$$

Si on prend $X_k = \{U_1 + U_2 + \dots + U_k\}$
 $= \{X_{k-1} + U_k\}$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

alors $D_n(\omega) = \lfloor U_1 + U_2 + \dots + U_n \rfloor \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n$

donc $\frac{D_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

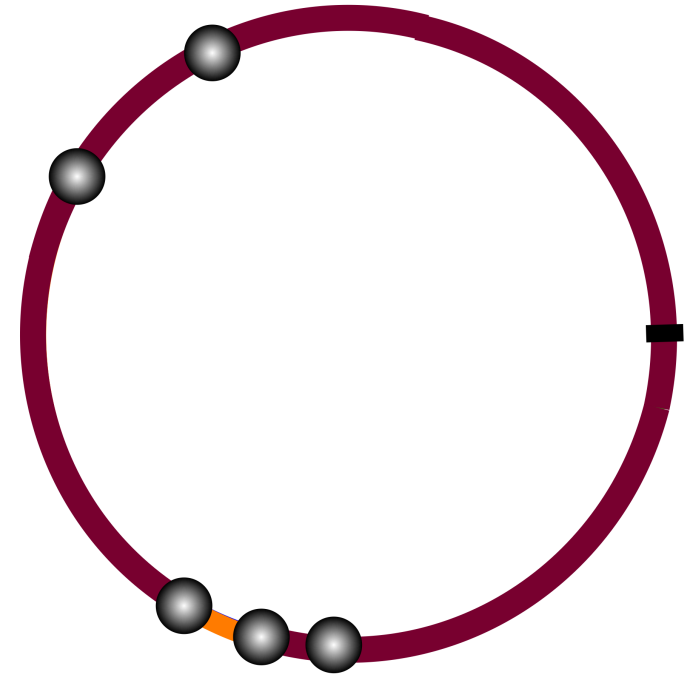
ce qui donne aussi une estimation précise de $\langle k \rangle$.

Mais les X_k sont-ils i.i.d.?

Exemple: permutations aléatoires.

Eulérien

U	Somme	X	ω
0,416	0,416	0,416	4
0,329	0,746	0,746	8
0,579	1,325	0,325	3
0,390	1,715	0,715	7
0,988	2,703	0,703	6
0,415	3,117	0,117	2
0,915	4,033	0,033	1
0,574	4,607	0,607	5
0,249	4,857	0,857	9



$D_n(\omega)$ = le nombre de descentes d' ω
 $= \# \{k : 1 \leq k \leq n-1, \omega_k > \omega_{k+1}\}$

$$\mathbb{P}(D_n=k) = \frac{\langle k \rangle}{n!} \leftarrow \text{nombre eulérien}$$

$$\omega_k > \omega_{k+1} \Leftrightarrow X_k > X_{k+1}$$

Si on prend $X_k = \{U_1 + U_2 + \dots + U_k\}$
 $= \{X_{k-1} + U_k\}$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

alors $D_n(\omega) = \lfloor U_1 + U_2 + \dots + U_n \rfloor \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n$

donc $\frac{D_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

ce qui donne aussi une estimation précise de $\langle k \rangle$.

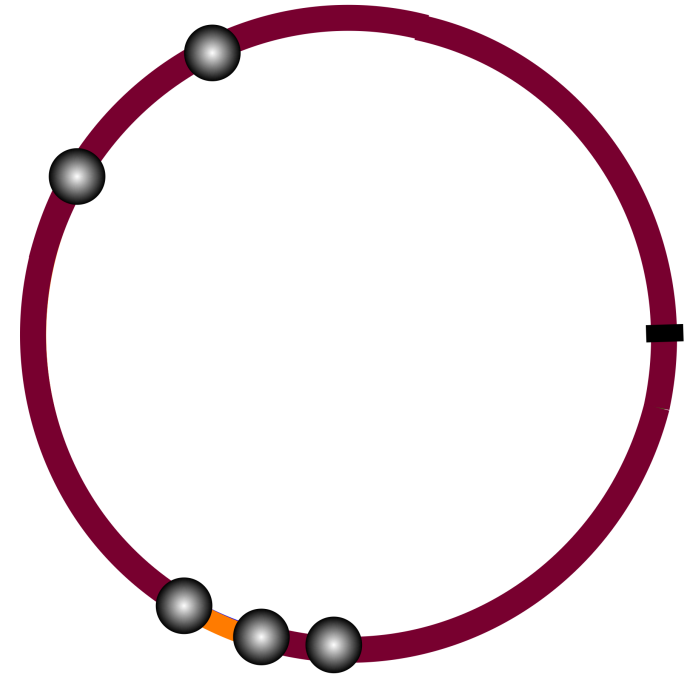
Mais les X_k sont-ils i.i.d.?

$$U \stackrel{\text{loi}}{=} \{x + U\} \quad !!!$$

Exemple: permutations aléatoires.

Eulérien

U	Somme	X	ω
0,416	0,416	0,416	4
0,329	0,746	0,746	8
0,579	1,325	0,325	3
0,390	1,715	0,715	7
0,988	2,703	0,703	6
0,415	3,117	0,117	2
0,915	4,033	0,033	1
0,574	4,607	0,607	5
0,249	4,857	0,857	9



$D_n(\omega)$ = le nombre de descentes d' ω
 $= \# \{k : 1 \leq k \leq n-1, \omega_k > \omega_{k+1}\}$

$$P(D_n=k) = \frac{\langle k^n \rangle}{n!} \leftarrow \text{nombre eulérien}$$

$$\omega_k > \omega_{k+1} \Leftrightarrow X_k > X_{k+1}$$

Si on prend $X_k = \{U_1 + U_2 + \dots + U_k\}$
 $= \{X_{k-1} + U_k\}$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

alors $D_n(\omega) = \lfloor U_1 + U_2 + \dots + U_n \rfloor \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n$

donc $\frac{D_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

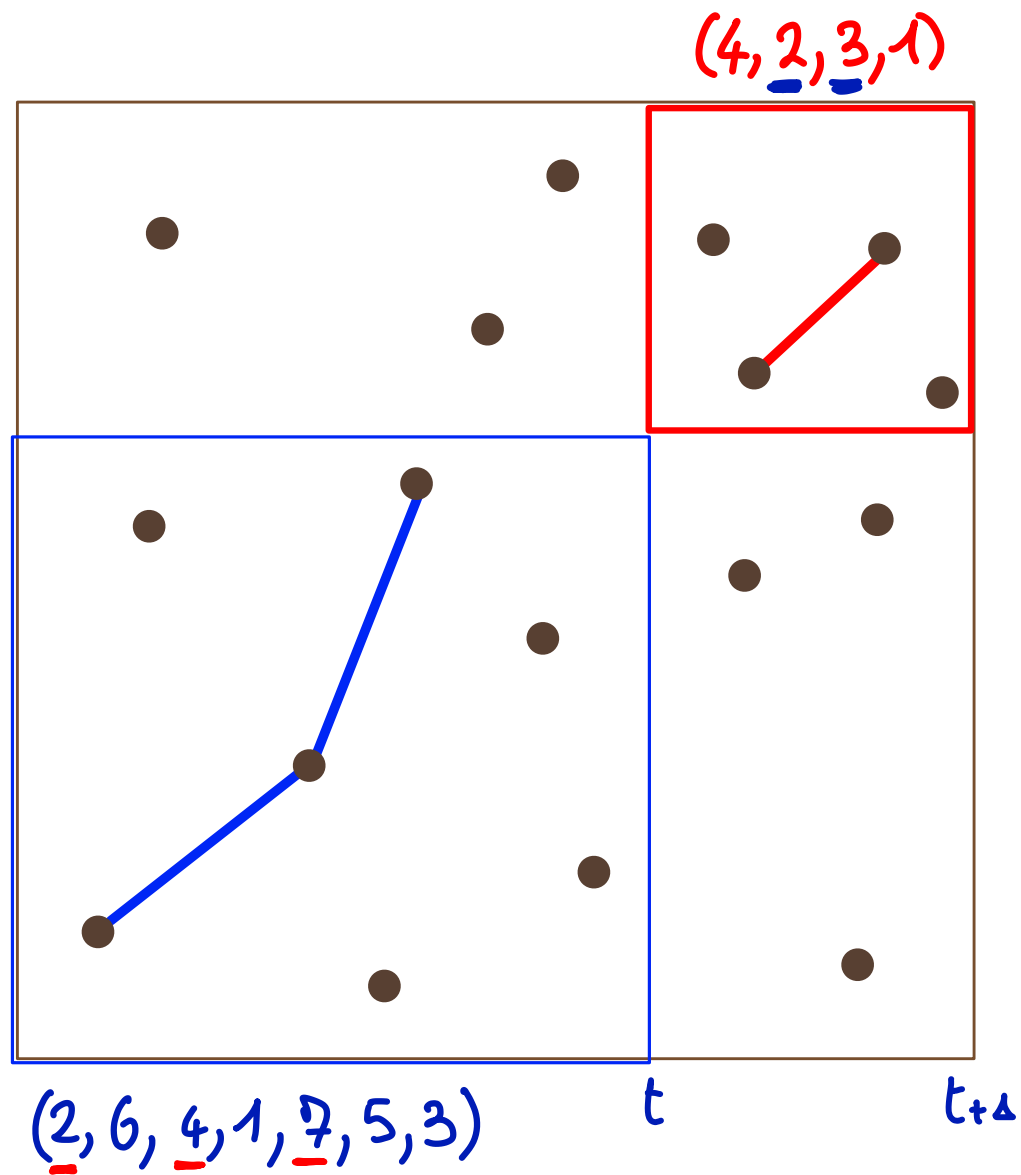
ce qui donne aussi une estimation précise de $\langle k^n \rangle$.

Mais les X_k sont-ils i.i.d.?

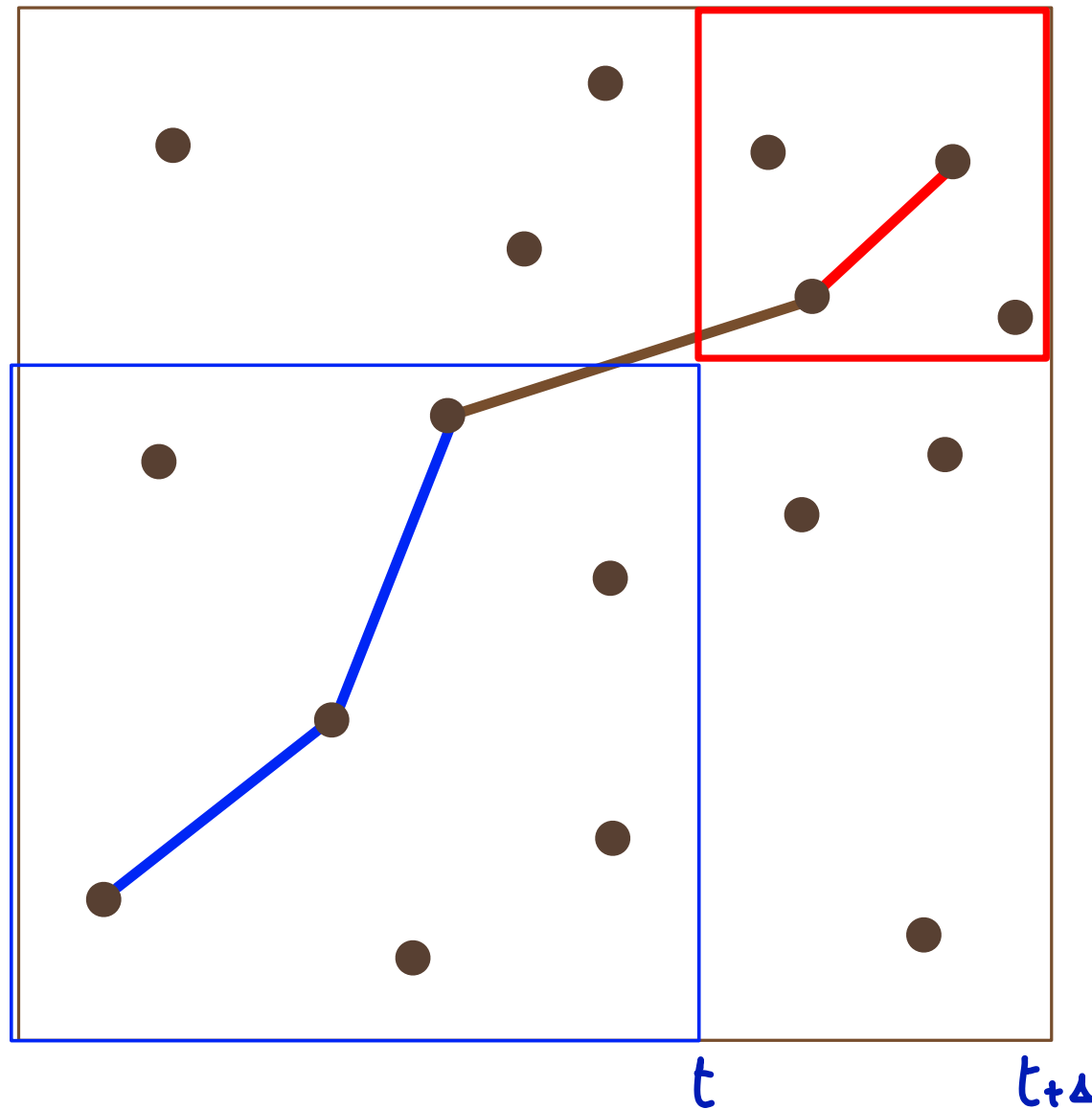
$$U \stackrel{\text{loi}}{=} \{x+U\} \quad !!!$$

$$\mathcal{L}(X_2 / X_1 = x) = \mathcal{L}(\{x+U_2\}) = U_{[0,1]}$$

Processus de Poisson



Processus de Poisson

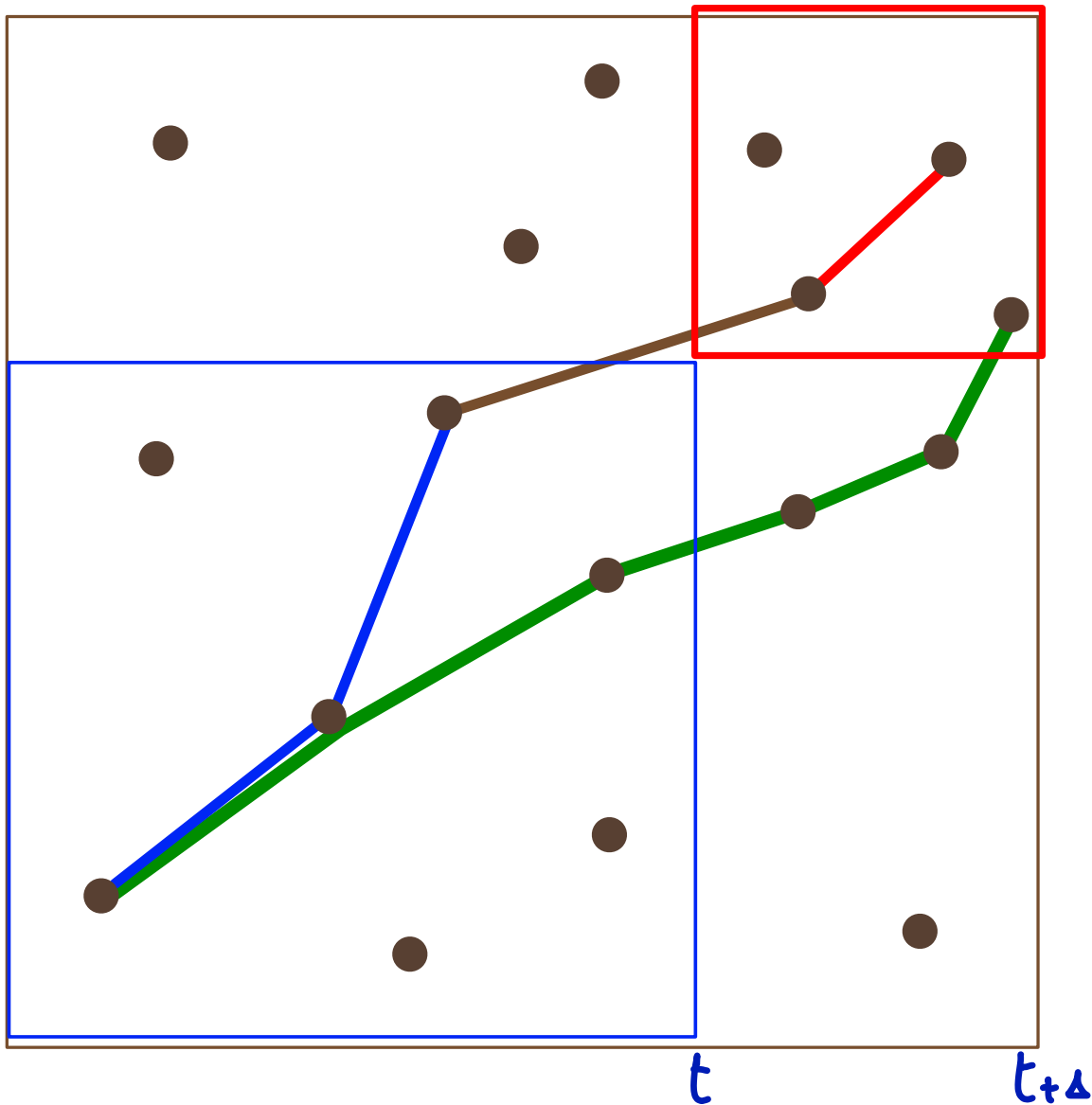


$$L_{0,t} = 3$$

$$L_{t,t+\Delta} = 2$$

$$L_{0,t+\Delta} = 6 \geq L_{0,t} + L_{t,t+\Delta}$$

Processus de Poisson

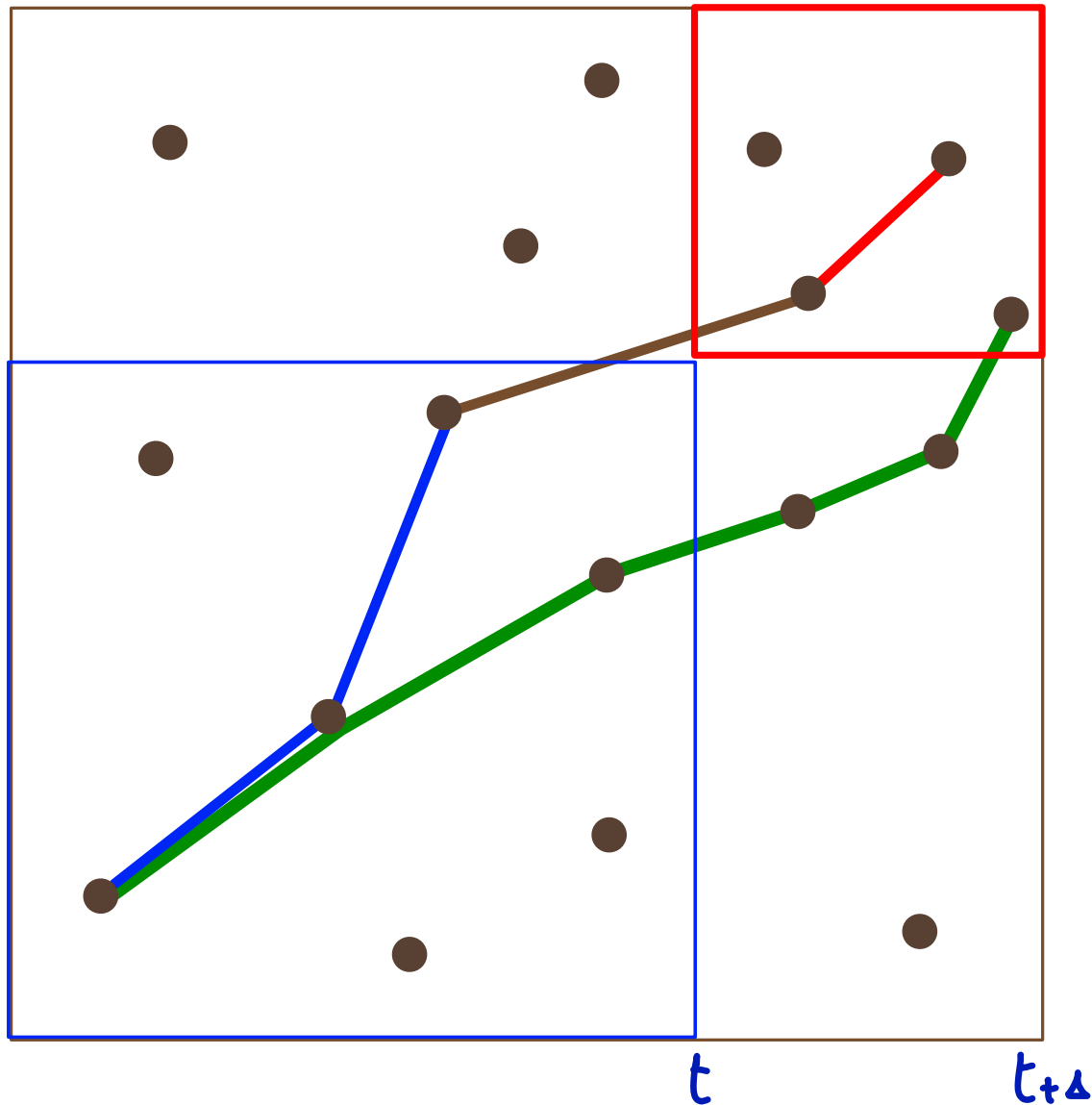


$$L_{0,t} = 3$$

$$L_{t,t+\Delta} = 2$$

$$L_{0,t+\Delta} = 6 \geq L_{0,t} + L_{t,t+\Delta}$$

Processus de Poisson



$$L_{0,t} = 3$$

$$L_{t,t+\Delta} = 2$$

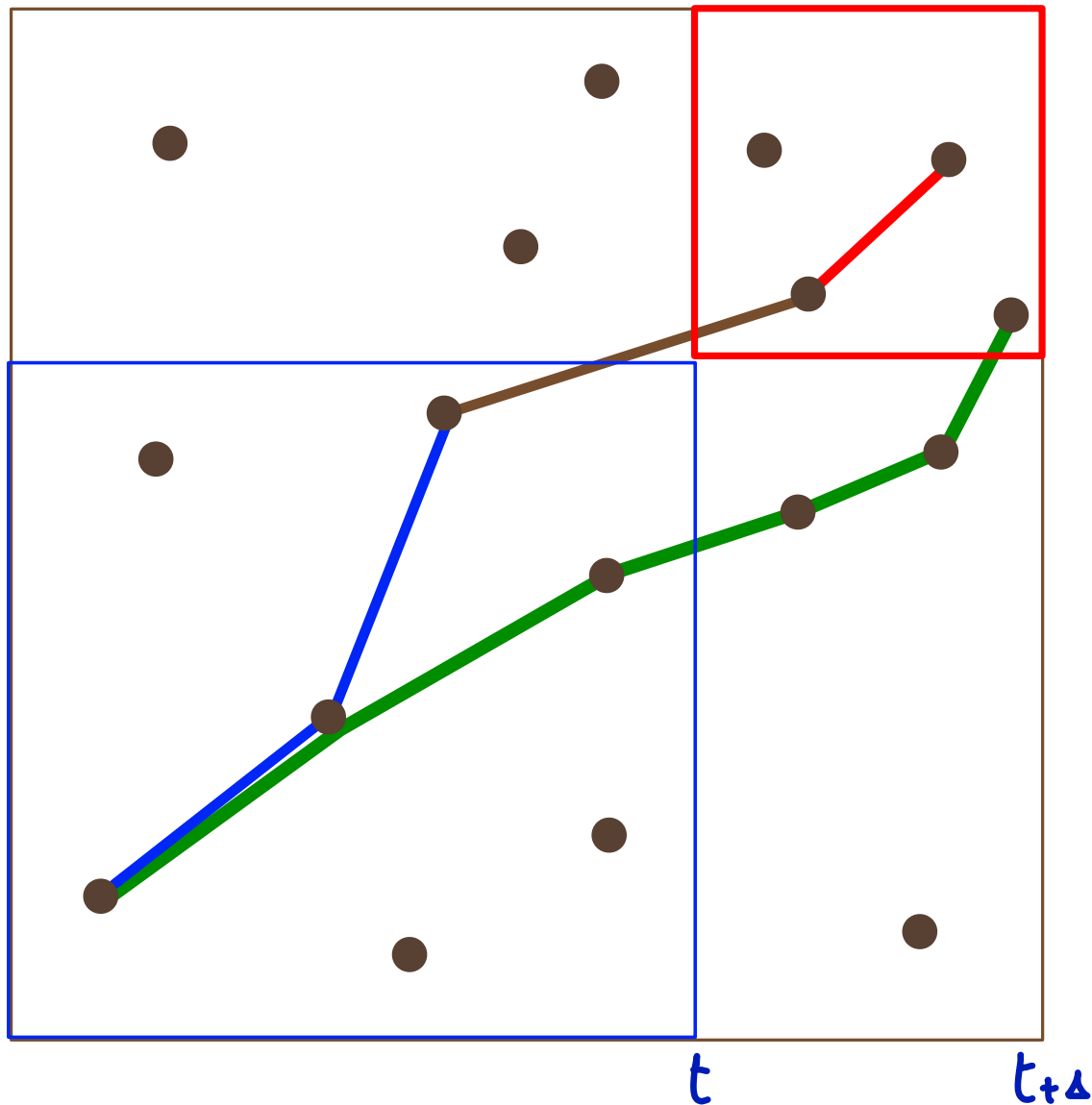
$$L_{0,t+\Delta} = 6 \geq L_{0,t} + L_{t,t+\Delta}$$

$$L_{t,t+\Delta} \simeq L_{0,\Delta}$$

$$\mathbb{E}[L_{0,t}] = f(t)$$

$$f(t+\Delta) \geq f(t) + f(\Delta)$$

Processus de Poisson



$$L_{0,t} = 3$$

$$L_{t,t+\Delta} = 2$$

$$L_{0,t+\Delta} = 6 \geq L_{0,t} + L_{t,t+\Delta}$$

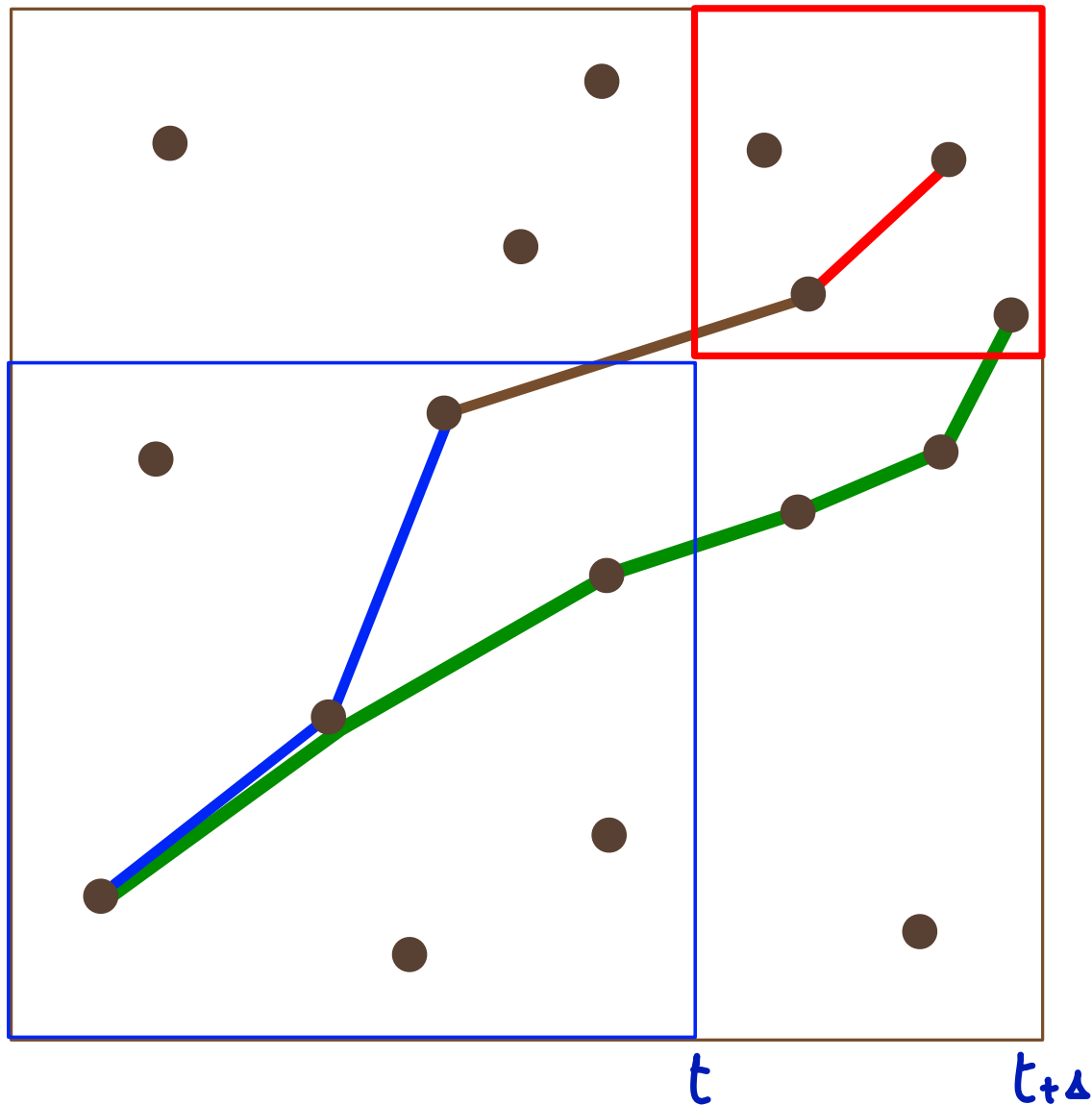
$$L_{t,t+\Delta} \simeq L_{0,\Delta}$$

$$\mathbb{E}[L_{0,t}] = f(t)$$

$$f(t+\Delta) \geq f(t) + f(\Delta)$$

$$\rightarrow \exists \gamma \text{ tq } f(t) \underset{+\infty}{\sim} \gamma t$$

Processus de Poisson



$$L_{0,t} = 3$$

$$L_{t,t+\Delta} = 2$$

$$L_{0,t+\Delta} = 6 \geq L_{0,t} + L_{t,t+\Delta}$$

$$L_{t,t+\Delta} \simeq L_{0,\Delta}$$

$$\mathbb{E}[L_{0,t}] = f(t)$$

$$f(t+\Delta) \geq f(t) + f(\Delta)$$

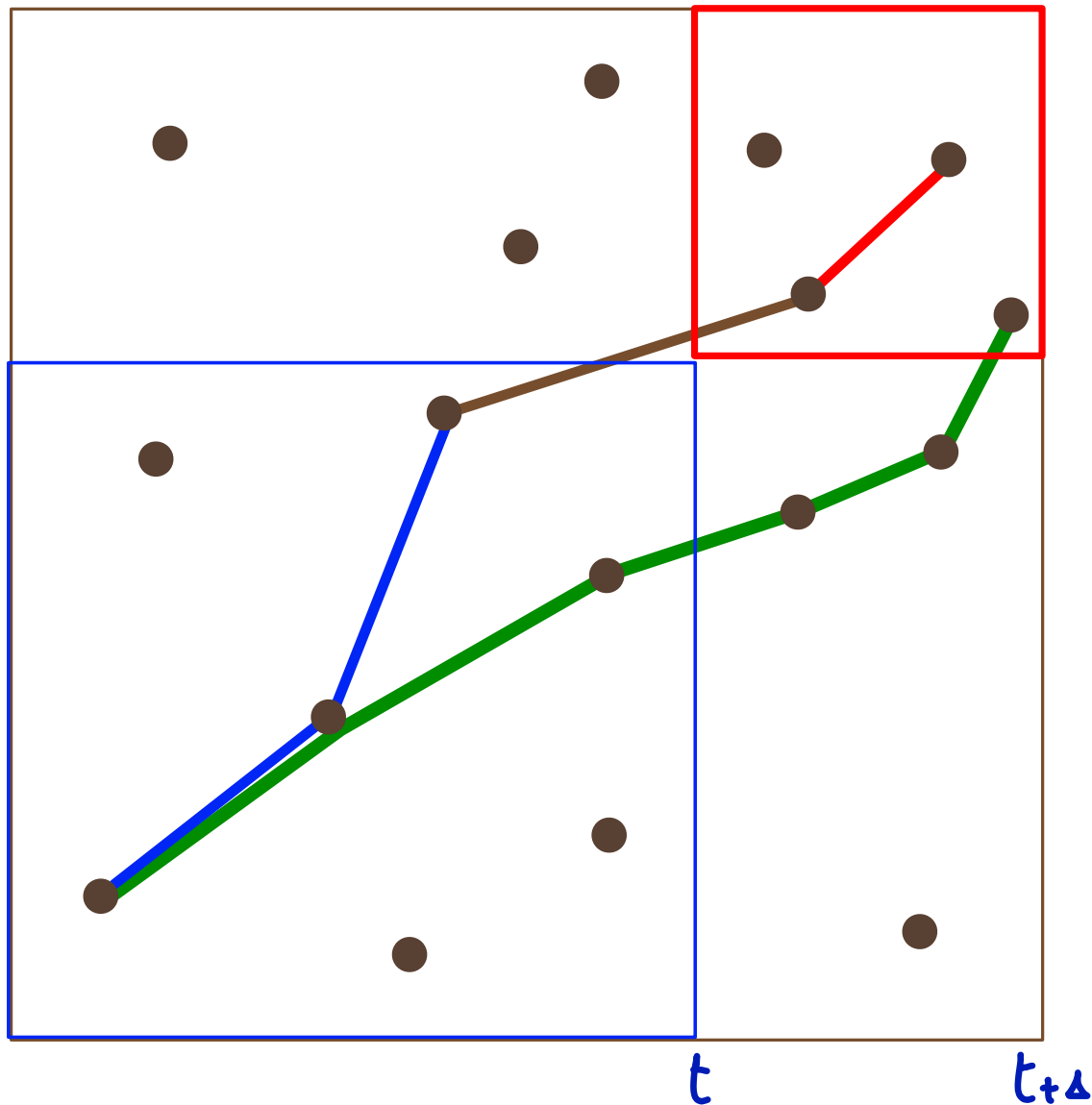
$$\rightarrow \exists \gamma \quad t_0 \quad f(t) \sim_{t \rightarrow \infty} \gamma t$$

$$f(n) \sim a_{n^2} \quad \text{car}$$

$$f(n) = \sum_{k \geq 0} e^{-n^2} \frac{n^{2k}}{k!} a_k$$

$$|f(n) - a_n| = O(n^{1/4})$$

Processus de Poisson



$$L_{0,t} = 3$$

$$L_{t,t+\Delta} = 2$$

$$L_{0,t+\Delta} = 6 \geq L_{0,t} + L_{t,t+\Delta}$$

$$L_{t,t+\Delta} \simeq L_{0,\Delta}$$

$$\mathbb{E}[L_{0,t}] = f(t)$$

$$f(t+\Delta) \geq f(t) + f(\Delta)$$

$$\rightarrow \exists \gamma \quad t_0 \quad f(t) \sim_{t \rightarrow \infty} \gamma t$$

$$f(n) \sim a_{n^2} \quad \text{car}$$

$$f(n) = \sum_{k \geq 0} e^{-n^2} \frac{n^{2k}}{k!} a_k$$

$$|f(n) - a_n| = O(n^{1/4})$$