Polynômes latticiels sur treillis finis

Présentation pour EJCIM 2018

Quentin Brabant
Université de Lorraine, INRIA, LORIA (équipe Orpailleur),
Directeur de thèse : Miguel Couceiro

March 27, 2018

Treillis et polynômes latticiels, d'un point de vue formel

Ordres partiels, treillis

Soit un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$. Pour $x \in X$,

- majorants$(x) = \{y \in X \mid x \leq y\}$,
- minorants$(x) = \{y \in X \mid y \leq x\}$.

Ordres partiels, treillis

Soit un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$. Pour $x \in X$,

- majorants$(x) = \{y \in X \mid x \leq y\}$,
- minorants$(x) = \{y \in X \mid y \leq x\}$.

Soit $x, y \in X$.

- Lorsque majorants$(x) \cap$ majorants(y) possède un élément minimal, on l'appelle **supremum**, et on le note $x \vee y$.
- Lorsque minorants$(x) \cap$ minorants(y) possède un élément maximal, on l'appelle **infimum**, et on le note $x \wedge y$.

Ordres partiels, treillis

Soit un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$. Pour $x \in X$,

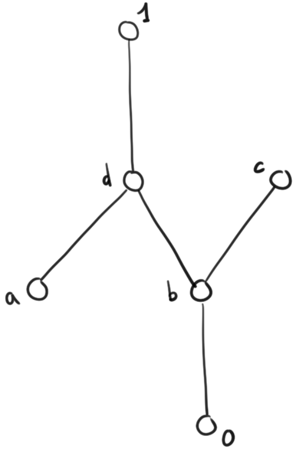
- majorants$(x) = \{y \in X \mid x \leq y\}$,
- minorants$(x) = \{y \in X \mid y \leq x\}$.

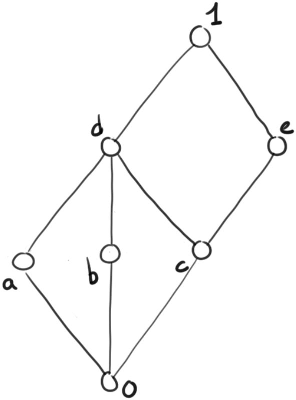
Soit $x, y \in X$.

- Lorsque majorants$(x) \cap$ majorants(y) possède un élément minimal, on l'appelle **supremum**, et on le note $x \vee y$.
- Lorsque minorants$(x) \cap$ minorants(y) possède un élément maximal, on l'appelle **infimum**, et on le note $x \wedge y$.

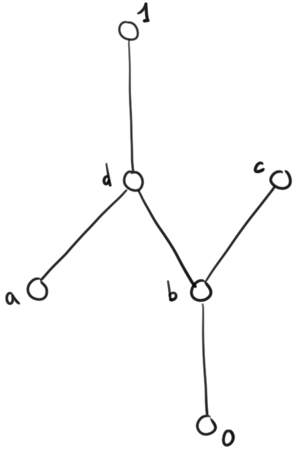
Un treillis (en anglais : lattice) est un ensemble partiellement ordonné $(L, \leq)$ tel que l'infimum et le supremum existe pour toute paire d'éléments de L.

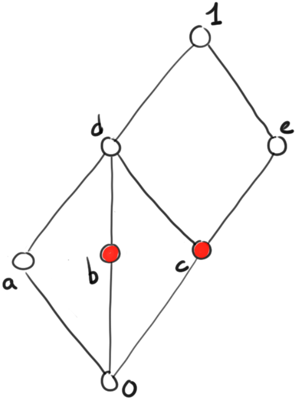
Ordres partiels, treillis



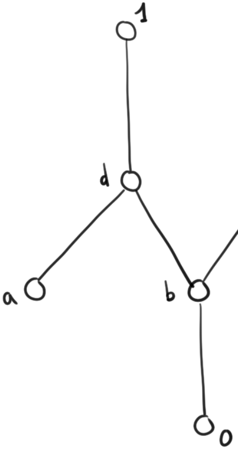


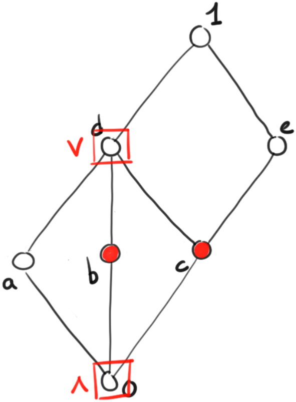
Ordres partiels, treillis





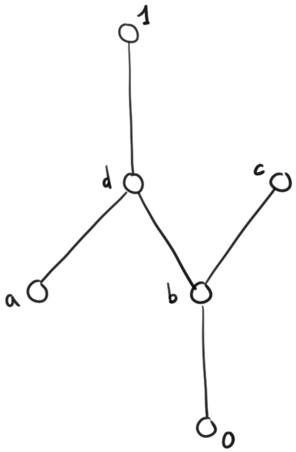
Ordres partiels, treillis

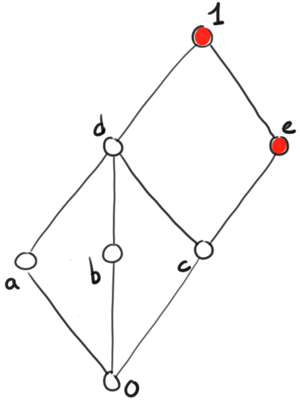




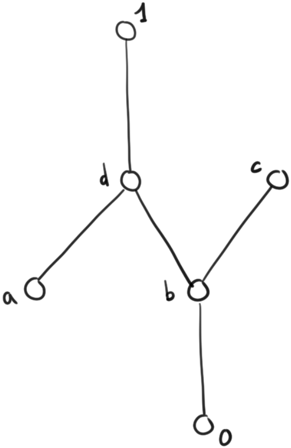
$$b \vee c = d, \quad b \wedge c = 0$$

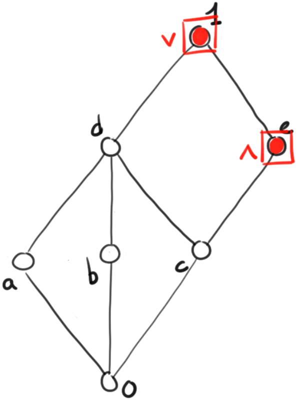
Ordres partiels, treillis





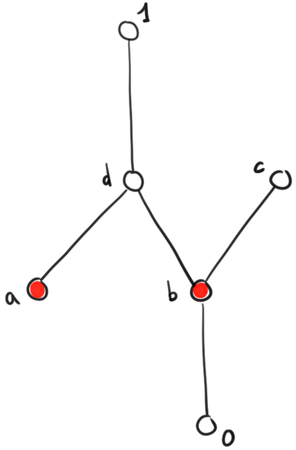
Ordres partiels, treillis

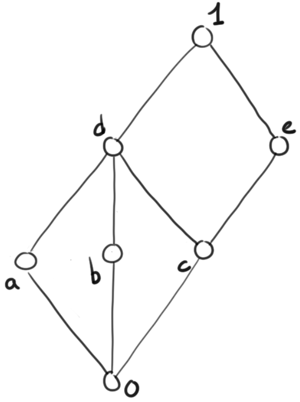




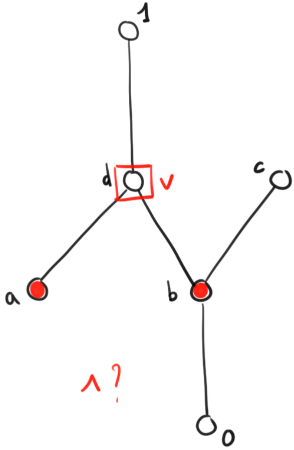
$$1 \vee e = e, \quad 1 \wedge e = 1$$

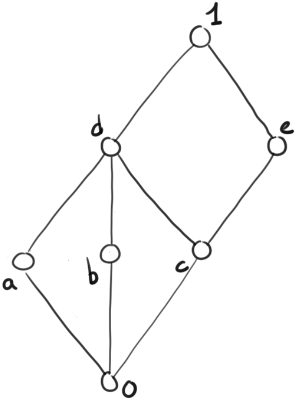
Ordres partiels, treillis



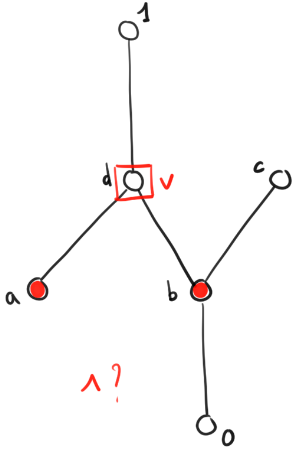


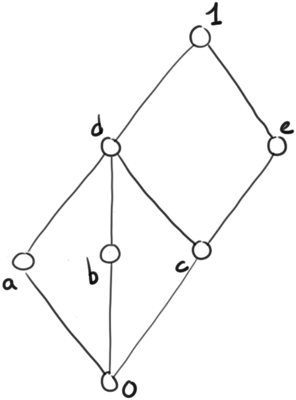
Ordres partiels, treillis





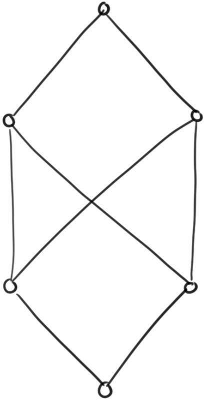
Ordres partiels, treillis



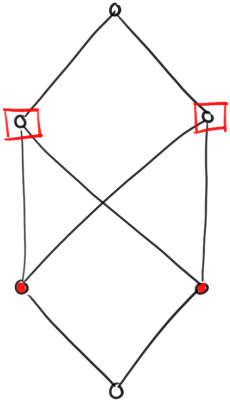


Remarque: les ensembles totalement ordonnés sont des treillis (ex : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$), où $\wedge$ correspond au min et $\vee$ correspond au max.

Ordres partiels, treillis



Ordres partiels, treillis



Treillis, définition algébrique

Un treillis est une algèbre $(L, \wedge, \vee)$ telle que L est un ensemble d'éléments, et deux opérateurs binaires $\wedge$ et $\vee$ vérifient les conditions:

- commutativité : $a \vee b = b \vee a$, et $a \wedge b = b \wedge a$,
- associativité : $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, et $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,
- absorption : $a \wedge (a \vee c) = a$ et $a \vee (a \wedge c) = a$.

Treillis, définition algébrique

Un treillis est une algèbre $(L, \wedge, \vee)$ telle que L est un ensemble d'éléments, et deux opérateurs binaires $\wedge$ et $\vee$ vérifient les conditions:

- commutativité : $a \vee b = b \vee a$, et $a \wedge b = b \wedge a$,
- associativité : $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, et $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,
- absorption : $a \wedge (a \vee c) = a$ et $a \vee (a \wedge c) = a$.

Ordre associé aux opérations $\wedge$ et $\vee$:

$$a \vee b = b \quad \Leftrightarrow \quad a \wedge b = a \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b$$

Polynômes latticiels

Soit un ensemble de noms de variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et un treillis $(L, \wedge, \vee)$. Un polynôme latticiel sur L est une expression formée à partir d'un nombre fini d'applications des règles suivantes :

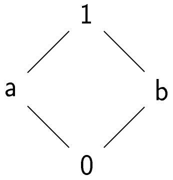
1. pour tout $i \in [n]$, x_i est un polynôme latticiel,
2. pour tout $c \in L$, c est un polynôme latticiel,
3. si p et q sont des polynômes latticiels, alors $p \wedge q$ et $p \vee q$ sont des polynômes latticiels.

Polynômes latticiels

Soit un ensemble de noms de variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et un treillis $(L, \wedge, \vee)$. Un polynôme latticiel sur L est une expression formée à partir d'un nombre fini d'applications des règles suivantes :

1. pour tout $i \in [n]$, x_i est un polynôme latticiel,
2. pour tout $c \in L$, c est un polynôme latticiel,
3. si p et q sont des polynômes latticiels, alors $p \wedge q$ et $p \vee q$ sont des polynômes latticiels.

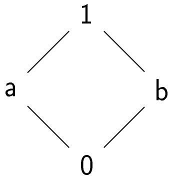
Exemples :



Soit un ensemble de noms de variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et un treillis $(L, \wedge, \vee)$. Un polynôme latticiel sur L est une expression formée à partir d'un nombre fini d'applications des règles suivantes :

1. pour tout $i \in [n]$, x_i est un polynôme latticiel,
2. pour tout $c \in L$, c est un polynôme latticiel,
3. si p et q sont des polynômes latticiels, alors $p \wedge q$ et $p \vee q$ sont des polynômes latticiels.

Exemples :

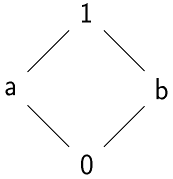


a,	(règle 2)
x_1,	(règle 1)
x_2,	(règle 1)
$a \vee x_2$,	(règle 3)
$x_1 \wedge (a \vee x_2)$	(règle 3)

Interpolation

Exemple :

Treillis $(L, \wedge, \vee)$



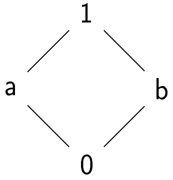
Fonction partielle $f : D \to L$, $D \subseteq L^n$

$$(a, b, a) \mapsto a$$
$$(0, 0, 1) \mapsto 1$$
$$(a, a, 1) \mapsto 1$$
$$(b, 0, b) \mapsto a$$

Interpolation

Exemple :

Treillis $(L, \wedge, \vee)$



Fonction partielle $f : D \to L,\ D \subseteq L^n$

$$(a, b, a) \mapsto a$$
$$(0, 0, 1) \mapsto 1$$
$$(a, a, 1) \mapsto 1$$
$$(b, 0, b) \mapsto a$$

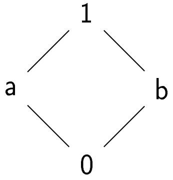
Un polynôme latticiel p interpole f si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in D : \quad p(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Interpolation

Exemple :

Treillis $(L, \wedge, \vee)$



Fonction partielle $f : D \to L,\ D \subseteq L^n$

$$(a, b, a) \mapsto a$$
$$(0, 0, 1) \mapsto 1$$
$$(a, a, 1) \mapsto 1$$
$$(b, 0, b) \mapsto a$$

Un polynôme latticiel p interpole f si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in D : \quad p(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Questions:

- Existe-t-il un polynôme latticiel interpolant f ?
- Comment trouver un tel polynôme ?
- Comment décrire l'ensemble des polynômes interpolant f ?

Distributivité

Un treillis est distributif si

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Distributivité

Un treillis est distributif si

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Dans ce cas, les polynômes latticiels peuvent être mis sous forme normale disjonctive ou conjonctive. Exemple :

$(a \vee x_1) \wedge (b \vee x_2)$

Distributivité

Un treillis est distributif si

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Dans ce cas, les polynômes latticiels peuvent être mis sous forme normale disjonctive ou conjonctive. Exemple :

$$(a \vee x_1) \wedge (b \vee x_2) = (a \wedge (b \vee x_2)) \vee (x_1 \wedge (b \vee x_2))$$

Distributivité

Un treillis est distributif si

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Dans ce cas, les polynômes latticiels peuvent être mis sous forme normale disjonctive ou conjonctive. Exemple :

$$\begin{aligned}(a \vee x_1) \wedge (b \vee x_2) &= (a \wedge (b \vee x_2)) \vee (x_1 \wedge (b \vee x_2)) \\ &= ((a \wedge b) \vee (a \wedge x_2)) \vee ((x_2 \wedge b) \vee (x_1 \wedge x_2))\end{aligned}$$

Distributivité

Un treillis est distributif si

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Dans ce cas, les polynômes latticiels peuvent être mis sous forme normale disjonctive ou conjonctive. Exemple :

$$\begin{aligned}(a \vee x_1) \wedge (b \vee x_2) &= (a \wedge (b \vee x_2)) \vee (x_1 \wedge (b \vee x_2)) \\ &= ((a \wedge b) \vee (a \wedge x_2)) \vee ((x_2 \wedge b) \vee (x_1 \wedge x_2)) \\ &= 0 \vee (a \wedge x_2) \vee (b \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_2).\end{aligned}$$

Distributivité

Un treillis est distributif si

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

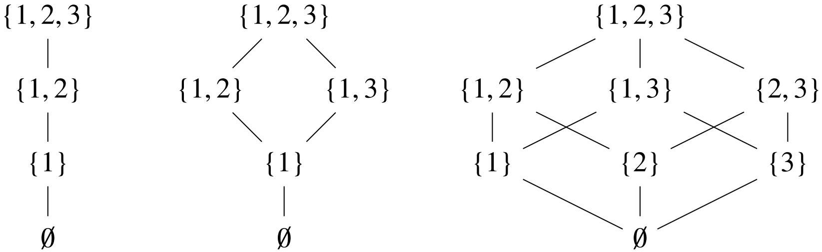
Dans ce cas, les polynômes latticiels peuvent être mis sous forme normale disjonctive ou conjonctive. Exemple :

$$\begin{aligned}(a \vee x_1) \wedge (b \vee x_2) &= (a \wedge (b \vee x_2)) \vee (x_1 \wedge (b \vee x_2)) \\ &= ((a \wedge b) \vee (a \wedge x_2)) \vee ((x_2 \wedge b) \vee (x_1 \wedge x_2)) \\ &= 0 \vee (a \wedge x_2) \vee (b \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_2).\end{aligned}$$

Une forme normale disjonctive contient au plus 2^n termes. Chaque fonction polynomiale est déterminé par 2^n valeurs.

Distributivité

Un treillis est distributif si et seulement si il est isomorphe à un treillis d'ensembles.



Ce qu'on sait faire, pour un treillis fini $(L, \leq)$ et une fonction partielle $f : D \to L$, $D \subseteq L^n$:

Interpolation

Ce qu'on sait faire, pour un treillis fini $(L, \leq)$ et une fonction partielle $f : D \to L$, $D \subseteq L^n$:

Si le treillis est distributif

- Donner le plus grand et le plus petit polynôme latticiel qui interpolent f, en $O(|D|^2|L|^2 n)$ dans le pire cas.

Interpolation

Ce qu'on sait faire, pour un treillis fini $(L, \leq)$ et une fonction partielle $f : D \to L$, $D \subseteq L^n$:

Si le treillis est distributif

- Donner le plus grand et le plus petit polynôme latticiel qui interpolent f, en $O(|D|^2|L|^2 n)$ dans le pire cas.

Si le treillis est quelconque

- Trouver un polynôme latticiel qui interpole f, en $O(|D|^2|L|^4 + n)$ dans le pire cas.

Applications

Applications

Une propriété intéressante des polynômes latticiels définis sur des treillis distrbutifs : la traductabilité en règles.

Applications

Une propriété intéressante des polynômes latticiels définis sur des treillis distrbutifs : la traductabilité en règles.

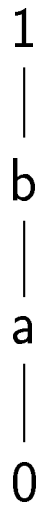
1
|
b
|
a
|
0

On part de la forme normale disjonctive d'un polynôme $p : L^n \to L$, par exemple

$$p(x_1, x_2) = (a \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

Applications

Une propriété intéressante des polynômes latticiels définis sur des treillis distrbutifs : la traductabilité en règles.



On part de la forme normale disjonctive d'un polynôme $p : L^n \to L$, par exemple

$$p(x_1, x_2) = (a \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

On génère les règles suivantes :

Applications

Une propriété intéressante des polynômes latticiels définis sur des treillis distrbutifs : la traductabilité en règles.

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ b \\ | \\ a \\ | \\ 0 \end{array}$$

On part de la forme normale disjonctive d'un polynôme $p : L^n \to L$, par exemple

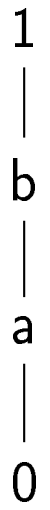
$$p(x_1, x_2) = (a \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

On génère les règles suivantes :

si $x_1 \geq a$ **alors** $p(x_1, x_2) \geq a$,

Applications

Une propriété intéressante des polynômes latticiels définis sur des treillis distrbutifs : la traductabilité en règles.



On part de la forme normale disjonctive d'un polynôme $p : L^n \to L$, par exemple

$$p(x_1, x_2) = (a \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

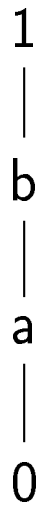
On génère les règles suivantes :

si $x_1 \geq a$ **alors** $p(x_1, x_2) \geq a$,

si $x_1 \geq a$ **et** $x_2 \geq a$ **alors** $p(x_1, x_2) \geq a$,

Applications

Une propriété intéressante des polynômes latticiels définis sur des treillis distrbutifs : la traductabilité en règles.



On part de la forme normale disjonctive d'un polynôme $p : L^n \to L$, par exemple

$$p(x_1, x_2) = (a \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

On génère les règles suivantes :

si $x_1 \geq a$ **alors** $p(x_1, x_2) \geq a$,

si $x_1 \geq b$ **et** $x_2 \geq b$ **alors** $p(x_1, x_2) \geq b$,

Applications

Une propriété intéressante des polynômes latticiels définis sur des treillis distrbutifs : la traductabilité en règles.

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ b \\ | \\ a \\ | \\ 0 \end{array}$$

On part de la forme normale disjonctive d'un polynôme $p : L^n \to L$, par exemple

$$p(x_1, x_2) = (a \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

On génère les règles suivantes :

si $x_1 \geq a$ **alors** $p(x_1, x_2) \geq a$,

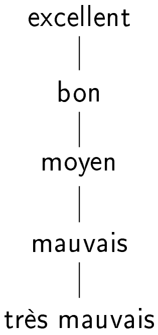
si $x_1 \geq b$ **et** $x_2 \geq b$ **alors** $p(x_1, x_2) \geq b$,

si $x_1 \geq 1$ **et** $x_2 \geq 1$ **alors** $p(x_1, x_2) \geq 1$.

Applications

Aide à la décision : un ensemble d'alternatives (ex : hôtels), sont évaluées sur n critères (positionnement, confort, prix...), ainsi que globalement

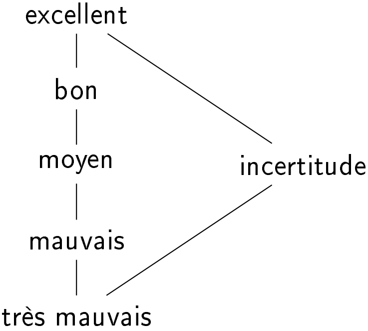
- le treillis $(L, \leq)$ est un espace d'évaluation ordinale,
- la fonction $f : L^n \to L$ donne un ensemble d'exemples d'évaluation,
- l'interpolation permet d'extraire un modèle ordinal pour l'agrégation des valeurs de préférence.



Applications

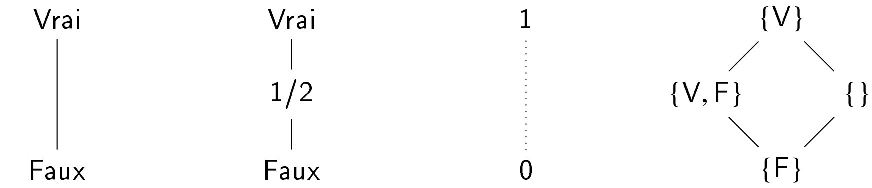
Aide à la décision : un ensemble d'alternatives (ex : hôtels), sont évaluées sur n critères (positionnement, confort, prix...), ainsi que globalement

- le treillis $(L, \leq)$ est un espace d'évaluation ordinale,
- la fonction $f : L^n \to L$ donne un ensemble d'exemples d'évaluation,
- l'interpolation permet d'extraire un modèle ordinal pour l'agrégation des valeurs de préférence.



Où apparaissent les treillis ?

En logique multivaluée:



Logique classique

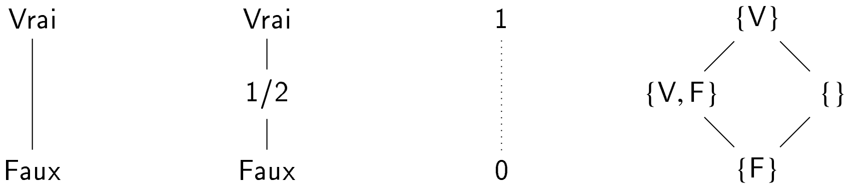
Logique de Łukasiewicz

Logique de Gödel (G_∞)

Relevance logic

Où apparaissent les treillis ?

En logique multivaluée:



Logique classique

Logique de Łukasiewicz

Logique de Gödel (G_∞)

Relevance logic

Un polynôme latticiel = une fonction logique non-décroissante.

Interpolation = chercher les formules logiques sans négation en cohérence avec un ensemble d'interprétations.

Où apparaissent les treillis ?

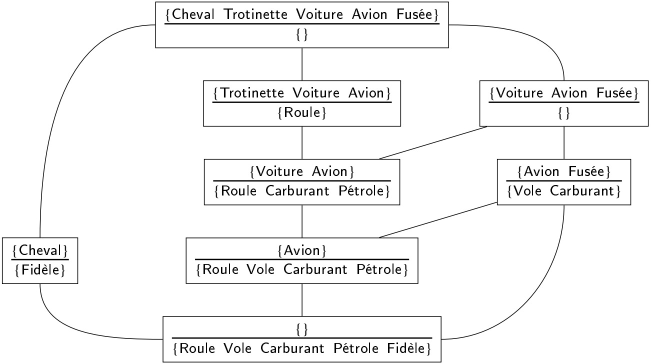
L'ensemble des ensembles fermés par un opérateur de clôture forme un treillis. Cas particulier, la Formal Concept Analysis (FCA):

	Roule	Vole	Nécessite carburant	Nécessite pétrole	Compagnon fidèle
Cheval					×
Trotinette	×				
Voiture	×		×	×	
Avion	×	×	×	×	
Fusée		×	×		

Où apparaissent les treillis ?

L'ensemble des ensembles fermés par un opérateur de clôture forme un treillis. Cas particulier, la Formal Concept Analysis (FCA):

	Roule	Vole	Nécessite carburant	Nécessite pétrole	Compagnon fidèle
Cheval					×
Trotinette	×				
Voiture	×		×	×	
Avion	×	×	×	×	
Fusée		×	×		



Quelques références

- B.A. Davey, H.A Priestley, Introduction to Lattices and Order. *Cambridge University Press*, 2002.
- J-L. Marichal, Weighted lattice polynomials. *Discrete Mathematics*, Elsevier, 309:4, 814–820, 2009.
- M. Couceiro, D. Dubois, H. Prade, A. Rico, T. Waldhauser, General Interpolation by Polynomial Functions of Distributive Lattices. *Proceedings of IPMU*, 2012.
- Q. Brabant, M. Couceiro, J. Figueira, Interpolation by lattice polynomial functions: a polynomial time algorithm. *submitted to Fuzzy Sets and Systems*
- Q. Brabant, M. Couceiro, k-maxitive Sugeno integrals as aggregation models for ordinal preferences. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, 2017